

VILNIAUS PEDAGOGINIS UNIVERSITETAS

L. GRINIUVIENĖ

STATISTIKOS PRAKTINIAI DARBAI

(metodinė medžiaga)

Vilnius, 2001

UDK 311
Gr 403

Recenzentas prof. R. Januškevičius

ISBN 9986-869-82-X

© Vilniaus pedagoginis universitetas

TURINYS

PRATARMĖ	4
1. STATISTINIŲ DUOMENŲ TVARKYMAS	5
2. IMTIES SKAITINIŲ CHARAKTERISTIKŲ SKAIČIAVIMAS	13
3. CHI-KVADRATO KRITERIJAUŠ TAIKYMAS	16
4. KORELIACINĖ - REGRESINĖ ANALIZĖ	22
5. DINAMIKOS EILUTĖS	35
PRAKTINIŲ DARBŲ UŽDUOTYS	42
PRATIMAI	72
PRIEDAI	76
LITERATŪRA	78

P R A T A R M Ė

Šis metodinis darbas yra skirtas Vilniaus pedagoginio universiteto geografijos specialybės studentams. Jame pateikti statistikos pradmenys.

Jau vidurinėje mokykloje susipažįstama su paprasčiausiu duomenų sisteminiu. Šiame darbe daugiau nagrinėjamos trys temos: statistinių duomenų grupavimas intervalais ir tolimesnis to grupavimo panaudojimas (χ^2 kriterijaus taikymas), koreliacinė-regresinė analizė bei dinamikos (laiko) eilutės. Pradžioje trumpai pateiktos kai kurios rekomendacijos, teoriniai faktai ir pavyzdžiai. Tai turėtų padėti neakivaizdininkams atlikti praktinius darbus. Šiuolaikiniai skaičiuokliai turi statistikos režimą, todėl visus skaičiavimus nesunku atlikti ir be tokios galingos technikos kaip kompiuteris.

Išsamesnėms studijoms rekomenduočiau 2000 metais išėjusias knygas: V. Čekanačiaus ir G. Murausko „Statistika ir jos taikymai“, bei R. Januškevičiaus „Statistikos įvadas“.

1. STATISTINIŲ DUOMENŲ TVARKYMAS

Tarkime, kad atlikus kiekybinio požymio stebėjimus, gauta imtis

x_1, x_2, \dots, x_n .

Jeigu skirtingų požymio reikšmių yra nedaug, yra sudaroma dažnių lentelė :

Požymio reikšmė x_i	x_1	x_2	...	x_k
Dažnis n_i	n_1	n_2	...	n_k

Čia pirmoje eilutėje yra surašytos skirtingos požymio reikšmės x_i , išdėstytos didėjančia tvarka, o antroje eilutėje - tų reikšmių dažniai $n_i, i=1,2,\dots,k$. Be to, $n_1+n_2+\dots+n_k=n$.

Jei n didelis, o pasikartojančių reikšmių yra mažai, statistiniai duomenys yra skirstomi į intervalus. Tuo tikslu surandamos mažiausia (x_{\min}) ir didžiausia (x_{\max}) požymio reikšmės. Tada visas intervalas $[x_{\min}, x_{\max}]$ žingsniu h yra skaidomas į k mažesnių vienodo ilgio intervalų taškais t_1, t_2, \dots, t_{k+1} . Dalinio intervalo ilgį h galima parinkti taikant formulę:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \lg n} \quad (1.1)$$

Jei iš anksto žinoma, į kiek intervalų (tarkime, m), norima suskirstyti, tada

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m} \quad (1.2)$$

Sudaroma dažnių lentelė, kurioje nurodomi daliniai intervalai $[t_i, t_{i+1})$, dažniai n_i , santykiniai dažniai $\frac{n_i}{n}$ ir normuoti santykiniai dažniai $\frac{n_i}{n \cdot h}, i = 1,2,\dots,k$.

1.1 lentelė

Intervalas $[t_i, t_{i+1})$	Dažnis n_i	Santykinis dažnis $\frac{n_i}{n}$	Normuotas santykinis dažnis $\frac{n_i}{n \cdot h}$
$[t_1, t_2)$	n_1	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_1}{n \cdot h}$
$[t_2, t_3)$	n_2	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_2}{n \cdot h}$
...
$[t_k, t_{k+1})$	n_k	$\frac{n_k}{n}$	$\frac{n_k}{n \cdot h}$

Taškai $t_i, i = 1, 2, \dots, k$ parenkami taip:

$$t_1 = x_{\min},$$

$$t_2 = t_1 + h,$$

$$t_3 = t_2 + h,$$

...

$$t_{k+1} = t_k + h \geq x_{\max}.$$

Galima už t_i parinkti ir kitokią reikšmę, mažesnę už x_{\min} , tačiau turėtų būti tenkinamos nelygybės

$$x_{\min} - t_1 < \frac{h}{2} \quad \text{ir} \quad t_{k+1} - x_{\max} < \frac{h}{2}.$$

Pagal 1.1 lentelės duomenis brėžiamas grafikas. Taškai t_1, t_2, \dots, t_{k+1} atidedami x -ų ašyje, o normuoti santykiniai dažniai $\frac{x_1}{nh}, \frac{x_2}{nh}, \dots, \frac{x_k}{nh}$ y -ų ašyje. Kiekviename daliniame intervale $[t_i, t_{i+1})$,

$i = 1, 2, \dots, k$ yra brėžiamas h pločio ir $\frac{n_i}{nh}$ aukščio stačiakampis. Gautas grafikas vadinamas histograma. Ji vaizdiškai parodo požymio reikšmių pasiskirstymą daliniuose intervaluose. Kuo daugiau duomenų yra intervale, tuo aukštesnis yra stačiakampis.

1.1 pavyzdys. Duota imtis

6,02	5,62	5,51	4,13	4,67	3,73	5,85	5,46	6,57
6,02	5,45	4,50	4,28	5,61	4,99	5,73	4,72	5,99
4,14	4,58	4,62	4,37	5,30	5,94	4,32	3,66	5,91
6,99	3,00	7,21	5,82	5,19	4,19	4,03	3,78	6,87
2,43	7,35	4,04	3,15	4,56	4,69	5,92	4,42	4,89
4,34	4,77	5,29	5,86	3,21	4,34	4,15	4,51	5,67
4,89	2,91	5,83	5,25	3,26	6,40	3,64	6,31	5,98
6,88	5,57	4,07	4,40	6,13	6,43	6,24	6,54	3,72
6,83	4,65	5,79	5,55	6,07	5,19	4,46	3,06	3,53
3,63	5,10	5,65	5,40	7,65	3,95	4,47	6,69	4,21
5,77	5,74	5,76	4,24	4,11	6,50	5,00	4,70	5,10
4,99	5,02	5,13	4,94	4,96	4,78	4,80	5,16	5,06

Čia $n = 108$, $x_{\max} = 7,65$, $x_{\min} = 2,43$. Žingsnio h parinkimui panaudosime formulę (1.1).

Kadangi

$$\frac{7,65 - 2,43}{1 + 3,322 \lg 108} = \frac{5,22}{7,755} \approx 0,6731,$$

tai pasirenkame $h = 0,68$. Surandame intervalo $[2,43 ; 7,65]$ dalijimo taškus:

$$t_1 = 2,43,$$

$$t_2 = 2,43 + 0,68 = 3,11$$

$$t_3 = 3,11 + 0,68 = 3,79$$

$$t_4 = 3,79 + 0,68 = 4,47$$

$$t_5 = 4,47 + 0,68 = 5,15$$

$$t_6 = 5,15 + 0,68 = 5,83$$

$$t_7 = 5,83 + 0,68 = 6,51$$

$$t_8 = 6,51 + 0,68 = 7,19$$

$$t_9 = 7,19 + 0,68 = 7,87 > 7,65$$

Kadangi $7,87 - 7,65 = 0,22 < 0,68/2$, tai žingsnis h parinktas tinkamai.

Norėdami surasti dažnius n_i , parodančius, kiek imties reikšmių patenka į kurią intervalą, kiekvieną požymio reikšmę priskiriame intervalui, pažymėdami tašku arba brūkšneliu. Kai duomenų daug, patogiu formuoti dešimties reikšmių blokus $\overline{[X]}$, arba penkių reikšmių blokus

$\overline{[X]}$. Mūsų atveju

$[2,43; 3,11)$	$\cdot \cdot$	Vadinasi, $n_1=4$,
$[3,11; 3,79)$	$\overline{[X]}$	- $n_2=10$,
$[3,79; 4,47)$	$\overline{[X]} \overline{[X]}$	- $n_3=19$,
$[4,47; 5,15)$	$\overline{[X]} \overline{[X]} \overline{[X]}$	- $n_4=26$,
$[5,15; 5,83)$	$\overline{[X]} \overline{[X]} \cdot \cdot$	- $n_5=22$,
$[5,83; 6,51)$	$\overline{[X]} \overline{[X]}$	- $n_6=17$,
$[6,51; 7,19)$	$\overline{[X]}$	- $n_7=7$,
$[7,19; 7,87)$	\cdot	- $n_8=3$,

$$n = \sum_{i=1}^8 n_i = 108.$$

Požymio reikšmę, kuri sutampa su dalijimo tašku, priskiriame tam intervalui, kurio pradžios taškas sutampa su ta reikšme. Pvz., 5,83 priskiriame intervalui $[5,83; 6,51)$.

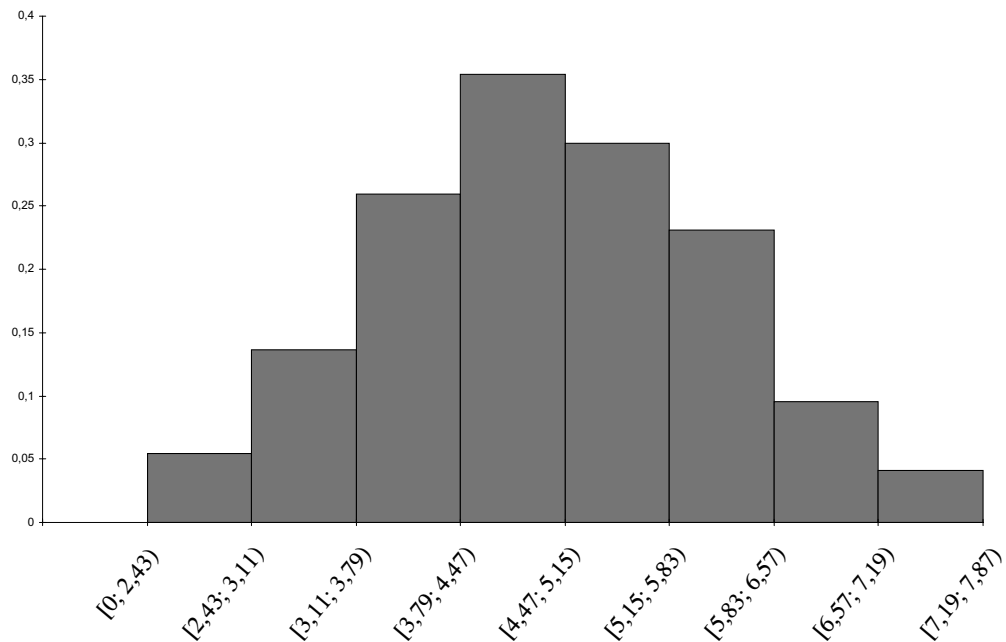
Po to, suradus $\frac{n_i}{n}$ ir $\frac{n_i}{nh}$, užpildome lentelę. Naudinga lentelėje turėti dar vieną skiltį, kurioje įrašomi dalinių intervalų vidurio taškai z_i , randami pagal formulę

$$z_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2} .$$

1.2 lentelė

Intervalas $[t_i; t_{i+1})$	Intervalo vidurio taškas z_i	Dažnis n_i	Santykinis dažnis $\frac{n_i}{n}$	Normuotas santykinis dažnis $\frac{n_i}{nh}$
[2,43 ; 3,11)	2,77	4	0,037	0,054
[3,11 ; 3,79)	3,45	10	0,092	0,136
[3,79 ; 4,47)	4,13	19	0,176	0,259
[4,47 ; 5,15)	4,81	26	0,241	0,354
[5,15 ; 5,83)	5,49	22	0,204	0,300
[5,83 ; 6,51)	6,17	17	0,157	0,231
[6,51 ; 7,19)	6,85	7	0,065	0,095
[7,19 ; 7,87)	7,53	3	0,028	0,041

Pagal gautus duomenis brėžiame histogramą (1.1 pav.).



1.2 pavyzdys. Duota imtis

0,9	8,9	8,5	41,6	4,8	2,2	2,0	4,5	2,5	21,6	7,0
23,2	3,2	8,1	10,3	5,7	16,9	10,8	13,8	12,5	6,3	11,9
2,9	0,6	0,8	27,3	14,5	1,6	1,4	3,9	15,2	7,4	19,0
2,7	5,1	25,0	0,0	9,9	6,6	3,4	30,3	7,7	11,3	8,1
6,0	16,0	13,1	5,4	1,2	4,2	17,9	3,7	1,8	20,2	2,7

Sudarysime dažnių lentelę ir nubrėšime histogramą. Šiame pavyzdyje $n = 55$, $x_{\min} = 0,0$, $x_{\max} = 41,6$. Kadangi duotos tik 55 požymio reikšmės, tai šią imtį grupuosime į 5 intervalus. Vadinasi,

$$h \approx \frac{41,6 - 0,0}{5} = 8,32 .$$

Pasirenkame dalinio intervalo ilgį $h = 8,4$. Apskaičiuotąją h reikšmę šiek tiek padidinome dėl dviejų priežasčių. Pirma, imties elementai teturi tik vieną ženklą po kabelio, todėl netikslinga h imti su dviem ženklais po kabelio. Antra, suapvalinus pagal apvalinimo taisyklės, ir paėmus mažesnę h reikšmę negu apskaičiuotoji, gali paaiškėti, kad paskutinis intervalas praplėstas daugiau negu $h/2$. Taigi, šiuo atveju dalijimo taškai yra:

$$t_1 = 0,0,$$

$$t_2 = 8,4,$$

$$t_3 = 16,8,$$

$$t_4 = 25,2,$$

$$t_5 = 33,6,$$

$$t_6 = 42,0.$$

Randame dažnius:

$$[0,0 ; 8,4) \quad \text{||||} \text{||||} \text{||||} \text{||||} \text{||||} \text{||||} \text{||}$$

$$[8,4 ; 16,8) \quad \text{||||} \text{||||} \text{|||}$$

$$[16,8 ; 25,2) \quad \text{||||} \text{||}$$

$$[25,2 ; 33,6) \quad \text{||}$$

$$[33,6 ; 42,0) \quad |$$

$$n_1 = 32,$$

$$n_2 = 13,$$

$$n_3 = 7,$$

$$n_4 = 2,$$

$$n_5 = 1;$$

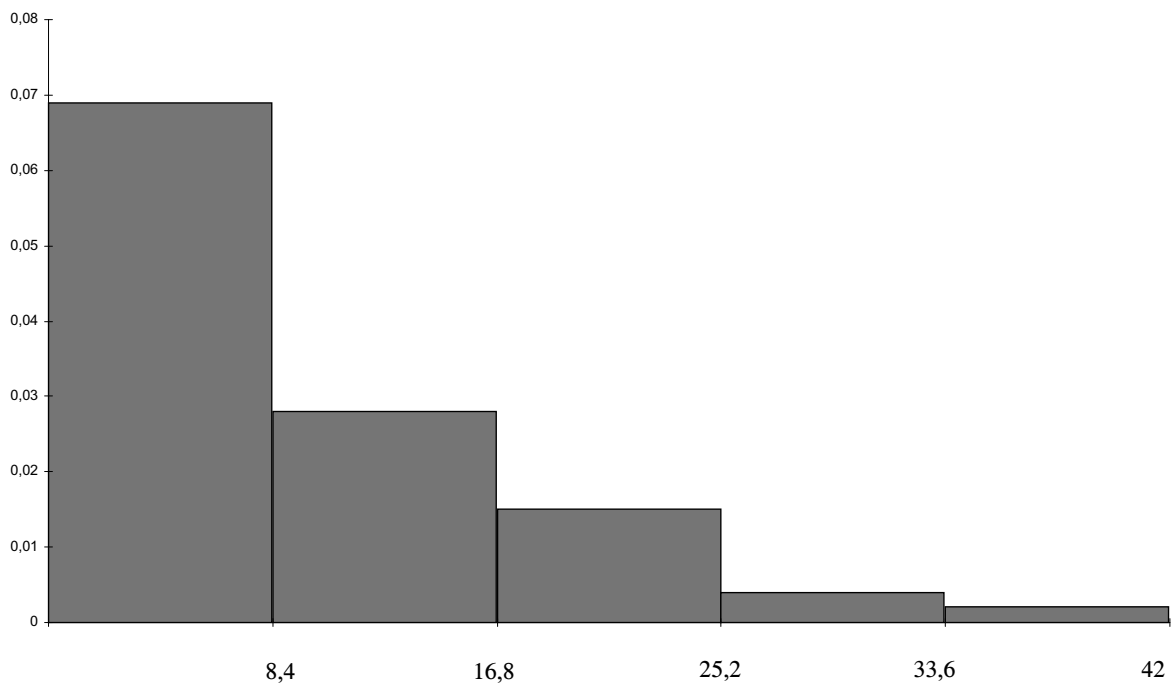
$$n = \sum n_i = 55 .$$

Užpildome lentelę:

1.3 lentelė

Intervalas $[t_i; t_{i+1})$	Vidurio taškas z_i	Dažnis n_i	Santykinis dažnis $\frac{n_i}{n}$	Norm.santykinis dažnis $\frac{n_i}{nh}$
[0,0 ; 8,4)	4,2	32	0,58	0,069
[8,4 ; 16,8)	12,6	13	0,24	0,028
[16,8 ; 25,2)	21,0	7	0,13	0,015
[25,2 ; 33,6)	29,4	2	0,04	0,004
[33,6 ; 42,0)	37,8	1	0,01	0,002

Nagrinėjamos imties histograma pavaizduota 1.2 pav.



1.2 pav.

1.3 pavyzdys. Duota imtis

7,12	6,50	3,10	4,49	4,40	4,40	7,96	3,73	7,04	6,27
5,87	3,76	5,87	5,87	7,74	4,41	8,67	9,32	8,62	4,54
7,98	9,36	3,08	5,12	9,38	3,72	6,59	7,79	5,06	3,91
8,62	8,64	6,59	6,53	4,29	3,00	5,18	6,50	9,38	4,50
5,13	6,55	4,64	7,26	4,25	5,84	9,37	7,90	3,27	6,83
9,14	3,72	7,07	8,60	7,21	5,15	8,66	7,21	3,77	9,14
6,55	8,63	5,81	8,62	5,14	10,00	6,15	6,53	4,82	6,60
8,69	10,00	3,08	5,84	7,93	10,00	5,84	9,35	8,13	8,17

Sudarysime šios imties dažnių lentelę ir nubrėšime histogramą.

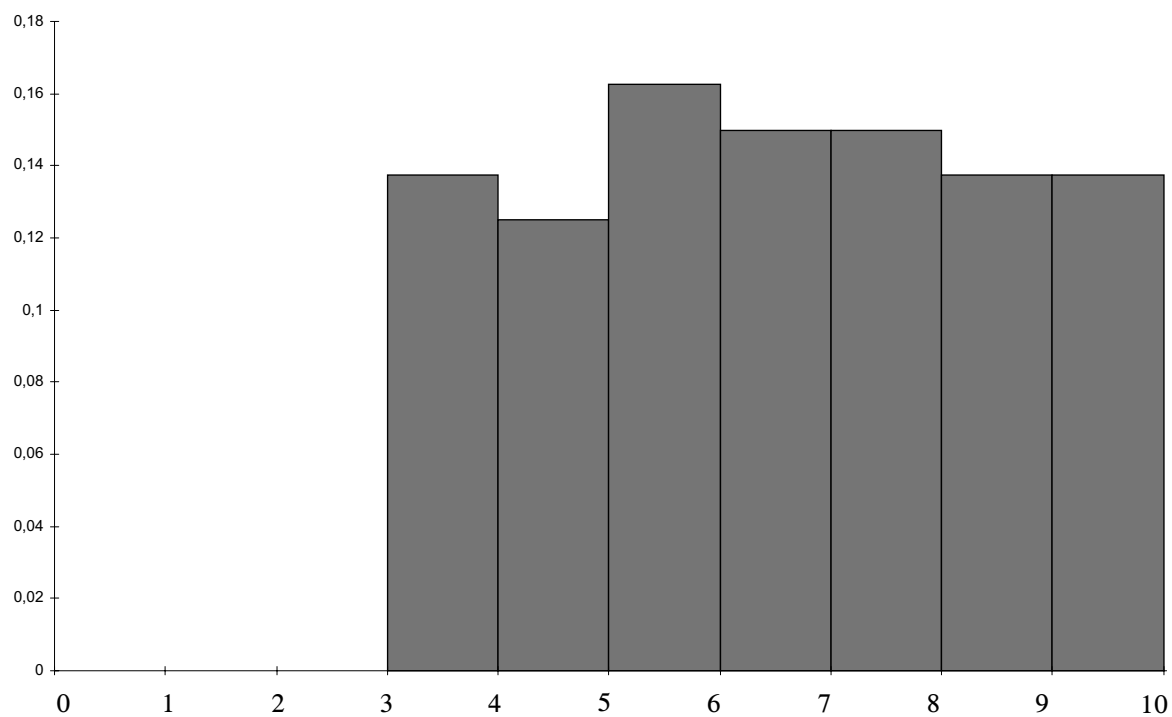
Čia $n = 80$, $x_{\min} = 3,0$; $x_{\max} = 10,0$.

Kadangi $x_{\max} - x_{\min} = 10 - 3 = 7$, tai pasirenkame $h = 1$. Šioje imtyje duomenys prasideda nuo trijų, o 7 yra sveikas skaičius, todėl patogu skirstyti į intervalus, kurių galai yra sveiki skaičiai, be to, 80 imties elementų skirstant į 7 intervalus, į kiekvieną intervalą, vidutiniškai imant, gali pakliūti daugiau kaip 10 požymio reikšmių.

1.4.lentelė

Intervalas $[t_i; t_{i+1})$	Vidurio taškas z_i	Dažnis n_i	Santykinis dažnis $\frac{n_i}{n}$	Norm.santykinis dažnis $\frac{n_i}{nh}$
[3 ; 4)	3,5	11	0,1375	0,1375
[4 ; 5)	4,5	10	0,1250	0,1250
[5 ; 6)	5,5	13	0,1625	0,1625
[6 ; 7)	6,5	12	0,1500	0,1500
[7 ; 8)	7,5	12	0,1500	0,1500
[8 ; 9)	8,5	11	0,1375	0,1375
[9 ; 10]	9,5	11	0,1375	0,1375

Nagrinėjamos imties histograma pavaizduota 1.3 pav.



1.3 pav.

2. IMTIES SKAITINIŲ CHARAKTERISTIKŲ SKAIĖIAVIMAS

Imties x_1, x_2, \dots, x_n vidurkis \bar{x} yra apibrėžiamas lygybe

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1)$$

Jeigu statistiniai duomenys pateikti dažnių lentelėje ir $\sum_{i=1}^k n_i = n$, tai

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \quad (2.2)$$

Sugrupuotų intervalais duomenų vidurkis \bar{x} gali būti skaičiuojamas apytiksliai pagal formulę

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i z_i \quad (2.3)$$

Čia z_i yra i -tojo intervalo $[t_i; t_{i+1})$ vidurio taškas:

$$z_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Mediana. Jei n požymio reikšmių yra sutvarkytos didėjimo tvarka ir sunumeruotos nuo 1 iki n , tai mediana (žymima Me) yra $\frac{n+1}{2}$ - toji reikšmė, kai n nelyginis skaičius. Kai n - lyginis

skaičius, mediana yra tarp $\frac{n}{2}$ - tosios ir $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ - tosios reikšmės ir nėra vienareikšmiškai apibrėžta. Jei nenurodyta kitaip, ją galima imti lygią šių dviejų reikšmių aritmetiniam vidurkiui.

Moda (žymima Mo) yra tokia požymio reikšmė, kurios dažnis yra didžiausias. Pavyzdžiui, imties, duotos dažnių lentelėje

x_i	2	4	6	8	10
n_i	5	8	3	1	3

moda $Mo=4$. O štai norėdami surasti medianą, turėtume parašyti variacinę eilutę 2,2,2,2,2,4,4,4,4,4,4,4,4,4,6,6,6,8,10,10,10. Pagal apibrėžimą būtų $Me=4$.

Kitas pavyzdys. Sugrupuota imtis

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	2	6	1	6	4

turi dvi modas, $Mo=2$ ir $Mo=4$, nes tų reikšmių dažniai yra didžiausi, be to, vienodi.

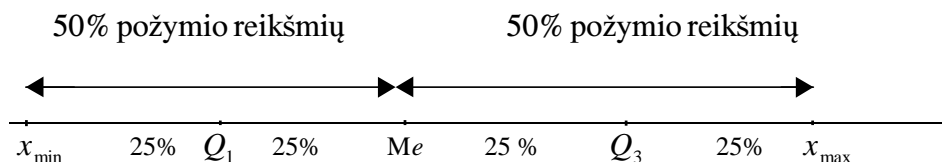
Sugrupuotų intervalais duomenų modą galima rasti pagal formulę:

$$M_o = x_0 + h \frac{n_2 - n_1}{(n_2 - n_1) + (n_2 - n_3)}. \quad (2.4)$$

Čia x_0 - modos intervalo pradžia, h - dalinio intervalo ilgis, n_1, n_2, n_3 - dažniai intervalų: n_1 - einančio prieš modos intervalą, n_2 - modos intervalo, n_3 - einančio po modos intervalo. Modos intervalu laikomas intervalas, kurio dažnis yra didžiausias.

Kvartiliai. Jeigu mediana padalija duomenis į dvi dalis, tai kvartilų paskirtis - dalyti duomenis į ketvirčius.

Pirmasis kvartilis Q_1 yra duomenų intervalo $[x_{\min}; Me]$ mediana, o trečiasis kvartilis Q_3 - intervalo $[Me, x_{\max}]$ mediana. Kvartilis Q_2 yra pati mediana Me .



Vidurkis, mediana, kvartiliai yra skaitinės imties charakteristikos, kurias dar galima būtų pavadinti padėties charakteristikomis, nes jos apibūdina stebėto požymio reikšmių padėtį realiųjų skaičių ašyje.

Sklaidos charakteristikos. Svarbiausios sklaidos charakteristikos yra *imties plotis* $R = x_{\max} - x_{\min}$, *imties dispersija* s^2 ir *vidutinis kvadratinis nuokrypis* s .

Imties dispersija s^2 apibrėžiama lygybe

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (2.5)$$

Kai duomenys užrašyti dažnių lentelėje,

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (2.6)$$

Sugrupavus duomenis intervalais, galima taikyti apytiksę s^2 skaičiavimo formulę:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (2.7)$$

Vidutinis kvadratinis nuokrypis s yra apibrėžiamas lygybe

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.8)$$

Tai kvadratinė šaknis iš dispersijos.

Imties dispersija ir vidutinis kvadratinis nuokrypis apibūdina stebėto požymio reikšmių išsisklaidymą apie vidurkį. Kuo daugiau reikšmių yra toli nuo vidurkio, tuo didesnė dispersija.

Dispersijos skaičiavimo formulę (2.5) galima pertvarkyti taip:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + (\bar{x})^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + (\bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}\bar{x} + (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \end{aligned}$$

Pavyzdys. Apskaičiuokime 1.1 pavyzdžio duomenų vidurkį \bar{x} , dispersiją s^2 ir vidutinį kvadratinį nuokrypį s pagal 1.2 lentelės duomenis, naudodami formules (2.3) ir (2.7).

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2,77 \cdot 4 + 3,45 \cdot 10 + 4,13 \cdot 19 + 4,81 \cdot 26 + 5,49 \cdot 22 + 6,17 \cdot 17 + 6,85 \cdot 7 + 7,53 \cdot 3}{108} = \\ &= 5,05; \\ s^2 &= \frac{(2,77 - 5,05)^2 \cdot 4 + (3,45 - 5,05)^2 \cdot 10 + (4,13 - 5,05)^2 \cdot 19 + (4,81 - 5,05)^2 \cdot 26 + \\ &+ (5,49 - 5,05)^2 \cdot 22 + (6,17 - 5,05)^2 \cdot 17 + (6,85 - 5,05)^2 \cdot 7 + (7,53 - 5,05)^2 \cdot 3}{108} = \\ &= 1,21; \end{aligned}$$

$$s = \sqrt{1,21} = 1,10$$

Skaičiuojant pagal imties vidurkio ir dispersijos apibrėžimo formules (2.1) ir (2.5) būtų gauta:
 $\bar{x} = 5,04$, $s^2 = 1,19$ ir $s = 1,09$.

Taigi, naudojant apytiksles formules, gavome, kad

\bar{x} skaičiavimo paklaida yra 0,01,

s^2 skaičiavimo paklaida yra 0,02,

s skaičiavimo paklaida yra 0,01.

Jos susidaro dėl to, kad kiekvieno intervalo reikšmės sutapatinamos su to intervalo vidurio tašku.

Skaičiuojant \bar{x} , s^2 bei s patartina atsižvelgti į apytikslio skaičiavimo rekomendacijas. Jei statistiniai duomenys nėra tikslūs skaičiai (ypač kai jie yra matavimo rezultatai), tai \bar{x} reikšmę reikia suapvalinti po kablelio paliekant tiek dešimtinių skaitmenų, kiek jų turi statistiniai duomenys. Tas pat pasakytina ir apie vidutinio kvadratinio nuokrypio s galutinę reikšmę. O skaičiuojant tarpinius rezultatus reikia imti vienu dešimtiniu skaitmeniu daugiau, negu jų turėjo pradiniai duomenys.

3. CHI-KVADRATO KRITERIJAUS TAIKYMAS

Panagrinėsime chi-kvadrato (χ^2) kriterijaus taikymą, nustatant stebėto požymio reikšmių suderinamumą su spėjama teorinio skirstinio tankio funkcija. Lygindami gautą histogramą pagal formą su žinomomis iš teorijos tankio funkcijomis, galime suformuluoti hipotezę apie stebėto požymio teorinį skirstinį. Pvz.: "stebėto požymio skirstinys yra normalusis". Čia iškyla klausimas: ar suderinami statistiniai duomenys su suformuluota hipoteze. Kriterijai, kurie taikomi tokioms hipotezėms tikrinti, vadinami suderinamumo kriterijais. Vienas iš jų - χ^2 kriterijus, kitaip dar vadinamas Pirsono kriterijumi. χ^2 kriterijaus statistika yra tokia:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (3.1)$$

Čia n - imties dydis, n_i - dažnis intervale $[t_p, t_{i+1})$, k - intervalų skaičius (žr.1.1 lentelę); p_i - tikimybės stebėto požymio reikšmėms patekti į intervalą $[t_p, t_{i+1})$, kai žinoma hipotetinė tankio funkcija $p(x)$.

Dažnai tankio funkcija $p(x)$ priklauso nuo vieno ar daugiau parametru, kurie paprastai būna nežinomi. Tokiais atvejais nežinomi parametrai yra keičiami jų įverčiais, gaunamais naudojant tikimybių teorijoje žinomus įverčių radimo metodus. Dydis χ^2 , apibrėžtas formule (3.1), yra

atsitiktinis dydis, kurio skirstinys, kai $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ ir n pakankamai didelis, yra apytiksliai lygus χ^2 skirstiniui su $r = k - 1$ -s laisvės laipsnių. Čia k yra intervalų skaičius, o s yra lygus skaičiui hipotetinės tankio funkcijos parametru, įvertintų pagal statistinius duomenis.

Suformulavus konkrečią hipotezę, apskaičiuojama pagal (3.1) χ^2 reikšmė, kuri pažymima χ_{sk}^2 , ir surandamas laisvės laipsnių skaičius r . Tada pasirenkama pakankamai maža tikimybė α , vadinama reikšmingumo lygmeniu. Ji turi būti tokia, kad būtų

$$P\{\chi^2 > \chi_{kr}^2\} \geq \alpha. \quad (3.2)$$

χ_{kr}^2 reikšmė pagal surastą r ir pasirinktą α , surandama iš statistinių lentelių (tokia yra 2-oji priedo lentelė).

Palyginus χ_{sk}^2 ir χ_{kr}^2 , daroma viena iš šių išvadų:

- 1) jei $\chi_{sk}^2 > \chi_{kr}^2$, tai hipotezė atmetama;
- 2) jei $\chi_{sk}^2 \leq \chi_{kr}^2$, tai sakoma, kad statistiniai duomenys neprieštarauja hipotezei.

3.1 pavyzdys. Remdamiesi 1.1 pavyzdžio ir duomenimis, patikrinsime hipotezę: "stebėto požymio skirstinys yra normalusis".

Normaliojo skirstinio tankio funkcija priklauso nuo parametru a ir σ^2 . Iš teorijos yra žinoma,

kad jų įverčiai, gauti pagal statistinius duomenis yra tokie: a įvertis yra \bar{x} , o σ^2 įvertis yra s^2 .
Vadinasi, mūsų atveju a reikia pakeisti skaičiumi 5,05, o σ^2 - 1,21.

Jei suformuluota normaliojo skirstinio hipotezė yra teisinga, tai intervale $[t_i; t_{i+1})$, $i=1,2,\dots,k$ tikimybė p_i skaičiuojama pagal formulę

$$p_i = \Phi\left(\frac{t_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{t_i - \bar{x}}{s}\right) \quad (3.2)$$

Čia $\Phi(x)$ yra Laplaso funkcija:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (3.3)$$

Tai normaliojo skirstinio su vidurkiu, lygiu nuliui ir dispersija, lygia vienetui, pasiskirstymo funkcija. Jos reikšmės randamos statistinėse lentelėse, kurios yra kiekvienoje tikimybių teorijos knygoje. Dažnai yra naudojamos lentelės ne (3.3) formule apibrėžtos funkcijos, o funkcijos $\Phi^*(x)$, taip pat vadinamos Laplaso funkcija:

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.4)$$

Naudojantis funkcijos $\Phi^*(x)$ lentelėmis (o tokia yra 1-oji priedo lentelė), $\Phi(x)$ reikšmės randamos taip:

$$\Phi(-x) = 0,5 - \Phi^*(x),$$

$$\Phi(x) = 0,5 + \Phi^*(x).$$

Norėdami apskaičiuoti χ_{sk}^2 pagal formulę (3.1) turime surasti tikimybes p_i (3.2 formulė).

Kadangi turi būti $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, tai ieškodami argumentų reikšmių $\frac{t_i - \bar{x}}{s}$, $i = 1, 2, \dots, k+1$, pakeičiame t_i ir t_{k+1} reikšmes, imdami atitinkamai $-\infty$ ir $+\infty$:

$$\frac{t_1 - \bar{x}}{s} = -\infty;$$

$$\frac{t_2 - \bar{x}}{s} = \frac{3,11 - 5,05}{1,1} = -1,76;$$

$$\frac{t_3 - \bar{x}}{s} = \frac{3,79 - 5,05}{1,1} = -1,15;$$

$$\frac{t_4 - \bar{x}}{s} = \frac{4,47 - 5,05}{1,1} = -0,53;$$

$$\frac{t_5 - \bar{x}}{s} = \frac{5,15 - 5,05}{1,1} = 0,09;$$

$$\frac{t_6 - \bar{x}}{s} = \frac{5,83 - 5,05}{1,1} = 0,71;$$

$$\frac{t_7 - \bar{x}}{s} = \frac{6,51 - 5,05}{1,1} = 1,33;$$

$$\frac{t_8 - \bar{x}}{s} = \frac{7,19 - 5,05}{1,1} = 1,95;$$

$$\frac{t_9 - \bar{x}}{s} = +\infty.$$

1-oje priedo lentelėje surandame funkcijos $\Phi(x)$ reikšmes tuose taškuose:

$$\Phi(-\infty) = 0;$$

$$\Phi(-1,76) = 0,0392;$$

$$\Phi(-1,15) = 0,1251;$$

$$\Phi(-0,53) = 0,2981;$$

$$\Phi(0,09) = 0,5 + 0,0359 = 0,5359;$$

$$\Phi(0,71) = 0,7611;$$

$$\Phi(1,33) = 0,9082;$$

$$\Phi(1,95) = 0,9744;$$

$$\Phi(+\infty) = 1.$$

Pagal formulę (3.2) randame tikimybes

$$p_1 = 0,0392 - 0 = 0,0392;$$

$$p_2 = 0,1251 - 0,0392 = 0,0859;$$

$$p_3 = 0,2981 - 0,1251 = 0,1730;$$

$$p_4 = 0,5359 - 0,2981 = 0,2378;$$

$$p_5 = 0,7611 - 0,5359 = 0,2252;$$

$$p_6 = 0,9082 - 0,7611 = 0,1471;$$

$$p_7 = 0,9744 - 0,9082 = 0,0662;$$

$$p_8 = 1 - 0,9744 = 0,0256.$$

Tolimesniems skaičiavimams patogų sudaryti tokią lentelę:

3.1 lentelė

$[t_i; t_{i+1})$	$(-\infty;$ 3,11)	[3,11 3,79)	[3,79; 4,47)	[4,47; 5,15)	[5,15; 5,83)	[5,83; 6,51)	[6,51; 7,19)	[7,19; $+\infty$)
n_i	4	10	19	26	22	17	7	3
p_i	0,0392	0,0859	0,1730	0,2378	0,2252	0,1471	0,0662	0,0256
np_i	4,23	9,28	18,68	25,68	24,32	15,89	7,15	2,76

χ^2 kriterijų rekomenduojama taikyti tada, kai $np_i \geq 5$. Jeigu yra intervalų, kuriuose $np_i < 5$, jie sujungiami, o tikimybės ir dažniai sudedami. Šiame pavyzdyje tokie intervalai yra pirmas ir paskutinis. Todėl pirmąjį sujungiamo su antruoju, o paskutinį su priešpaskutiniu. Gausime 3.2 lentelę.

3.2 lentelė.

$[t_i; t_{i+1})$	$(-\infty;$ 3,79)	[3,79; 4,47)	[4,47; 5,15)	[5,15; 5,83)	[5,83; 6,51)	[6,51; $+\infty$)
n_i	14	19	26	22	17	10
p_i	0,1251	0,1730	0,2378	0,2252	0,1471	0,0918
np_i	13,51	18,68	25,68	24,32	15,89	9,91

Ja naudodamiesi, apskaičiuojame χ_{sk}^2 (formulė (3.1):

$$\chi_{sk}^2 = \frac{(14 - 13,51)^2}{13,51} + \frac{(19 - 18,68)^2}{18,68} + \frac{(26 - 25,68)^2}{25,68} + \frac{(22 - 24,32)^2}{24,32} + \frac{(17 - 15,89)^2}{15,89} + \frac{(10 - 9,91)^2}{9,91} = 0,327.$$

Normaliojo skirstinio atveju laisvės laipsnių skaičius r yra randamas pagal formulę $r=k-3$, nes buvo įvertinti du parametrai: a ir σ^2 .

1.1 pavyzdžio duomenys buvo sugrupuoti į 8 intervalus, tačiau po sujungimo liko 6 intervalai, vadinasi, $r = 6-3=3$. Pasirenkame tikimybę $\alpha = 0,05$. Su tokia tikimybe hipotezė būtų atmesta, nors iš tikrųjų ji teisinga. 2-oje priedo lentelėje pagal $r = 3$ ir $\alpha = 0,05$ randame $\chi_{kr}^2 = 7,82$.

Išvada. Kadangi $0,327 < 7,82$, tai statistiniai duomenys neprieštarauja hipotezei, kad, stebėto požymio skirstinys yra normalusis.

3.2 pavyzdys. Remdamiesi 1.2 pavyzdžio duomenimis patikrinsime hipotezę: "stebėto požymio skirstinys yra eksponentinis".

Eksponentinio skirstinio tankio funkcija $p(x)$ yra tokia (čia $m > 0$):

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x < 0 \\ me^{-mx}, & \text{kai } x \geq 0 \end{cases}$$

Jei hipotezė teisinga, patekimo į intervalą $[t_i, t_{i+1})$ tikimybė p_i yra skaičiuojama pagal formulę

$$p_i = e^{-mt_i} - e^{-mt_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Iš teorijos yra žinoma, kad parametro reikšmė yra dydis, atvirkščias vidurkiui, todėl vertiname

taip: $m = \frac{1}{x} = \frac{1}{9,85} \approx 0,1.$

Vadinasi,

$$p_1 = e^{-0,1 \cdot 0} - e^{-0,1 \cdot 8,4} = 1 - e^{-0,84} = 0,5683,$$

$$p_2 = e^{-0,1 \cdot 8,4} - e^{-0,1 \cdot 16,8} = 0,4317 - 0,1864 = 0,2453,$$

$$p_3 = e^{-0,1 \cdot 16,8} - e^{-0,1 \cdot 25,2} = 0,1864 - 0,0805 = 0,1059,$$

$$p_4 = e^{-0,1 \cdot 25,2} - e^{-0,1 \cdot 33,6} = 0,0805 - 0,0347 = 0,0458,$$

$$p_5 = e^{-0,1 \cdot 33,6} - e^{-\infty} = 0,0347 - 0 = 0,0347.$$

Čia paskutinę tikimybę taip pat koreguojame taip, kad būtų $\sum_{i=1}^n p_i = 1.$

Sudarome lentelę

3.3.lentelė

$[t_i; t_{i+1})$	[0.0; 8.4)	[8.4; 16.8)	[16.8; 25.2)	[25.2; 33.6)	[33.6; +∞)
n_i	32	13	7	2	1
np_i	31,26	13,49	5,82	2,52	1,91

Apskaičiuojame χ_{sk}^2 :

$$\chi_{sk}^2 = \frac{(32 - 31,26)^2}{31,26} + \frac{(13 - 13,49)^2}{13,49} + \frac{(7 - 5,82)^2}{5,82} = 0,0414.$$

Laisvės laipsnių skaičius $r = k - 2 = 3 - 2 = 1$ (nes pagal statistinius duomenis įvertinamas tik vienas parametras).

Pasirenkame $\alpha = 0,05$. 2-oje priedo lentelėje randame, kad $\chi_{sk}^2 = 3,84$.

Išvada. Kadangi $0,0414 < 3,84$, tai statistiniai duomenys neprieštarauja hipotezei, kad stebėto požymio skirstinys yra eksponentinis.

3.3 Pavyzdys. Remdamiesi 1.3 pavyzdžio duomenimis patikrinsime hipotezę: "stebėto požymio skirstinys yra tolygus".

Jei hipotezė teisinga, tai tikimybė p_p su kuria patenkama į intervalą $[t_p; t_{p+1})$, lygi dalinio intervalo ilgio h ir viso reikšmių intervalo ilgio $10 - 3 = 7$ santykiui, t. y.

$$p_i = \frac{1}{7} = 0,14286, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \quad \text{Vadinasi, } np_i = 80 \cdot 0,14286 = 11,43.$$

Tada

$$\chi_{sk}^2 = \frac{3 \cdot (11 - 11,43)^2}{11,43} + \frac{(10 - 11,43)^2}{11,43} + \frac{(13 - 11,43)^2}{11,43} + \frac{2 \cdot (12 - 11,43)^2}{11,43} = 0,50$$

Laisvės laipsnių skaičius $r = 7 - 3 = 4$ (pagal statistinius duomenis nustatomi intervalo galai $a = 3$, $b = 10$). Pasirenkame $\alpha = 0,05$. Lentelėse randame $\chi_{kr}^2 = 9,49$. Kadangi $0,50 < 9,49$, tai statistiniai duomenys neprieštarauja hipotezei.

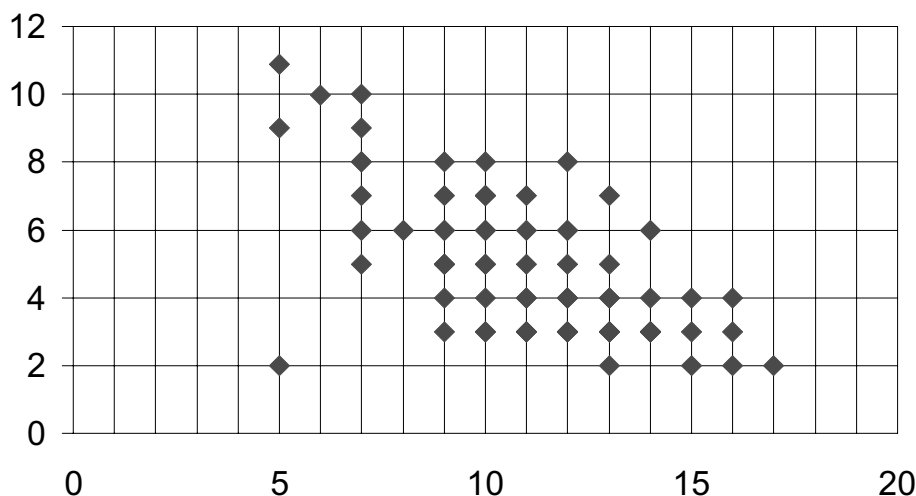
4. KORELIACINĖ – REGRESINĖ ANALIZĖ

Koreliacija - tai statistinė priklausomybė, neturinti griežto funkcinio ryšio. Sakoma, kad koreliacija sieja du požymius, jei vienas priklauso nuo kito požymio ir nuo daugelio atsitiktinių veiksnių. Todėl koreliacija pasireiškia tik "imant vidutiniškai".

Panagrinėkime pavyzdį. Buvo tirta grūdinių kultūrų derlingumo (cnt/ha) ir savikainos (Lt) priklausomybė. Gauti tokie duomenys:

(9;5)	(9;7)	(7;8)	(12;8)	(13;7)	(11;7)	(5;11)	(10;6)	(7;7)	(7;8)
(10;7)	(10;6)	(11;5)	(13;5)	(9;3)	(11;3)	(13;2)	(7;5)	(9;4)	(10;7)
(10;3)	(9;8)	(11;6)	(14;3)	(10;7)	(14;6)	(10;3)	(10;8)	(9;6)	(10;5)
(12;5)	(13;3)	(5;9)	(11;3)	(12;4)	(14;3)	(13;3)	(16;2)	(6;10)	(7;6)
(9;6)	(12;3)	(13;4)	(14;3)	(16;3)	(15;2)	(7;9)	(9;5)	(11;4)	(13;4)
(15;3)	(7;10)	(12;6)	(12;6)	(15;4)	(8;6)	(9;5)	(11;3)	(14;4)	(16;4)
(5;2)	(12;4)	(12;3)	(14;3)	(10;5)	(11;4)	(10;4)	(12;3)	(13;3)	(17;2)

Matome, kad derlingumas kinta nuo 5 iki 16 cnt/ha, o savikaina nuo 11 iki 2 litų. Pavaizduokime duomenis taškais koordinacių plokštumoje (4.1 pav.). Iš grafiko vaizdžiai matyti, kad esant derlingumui, pvz., 10 cnt/ha, savikaina gali būti 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 Lt. Kita vertus, savikainą 3 Lt atitinka derlingumas nuo 9 iki 16 cnt/ha.



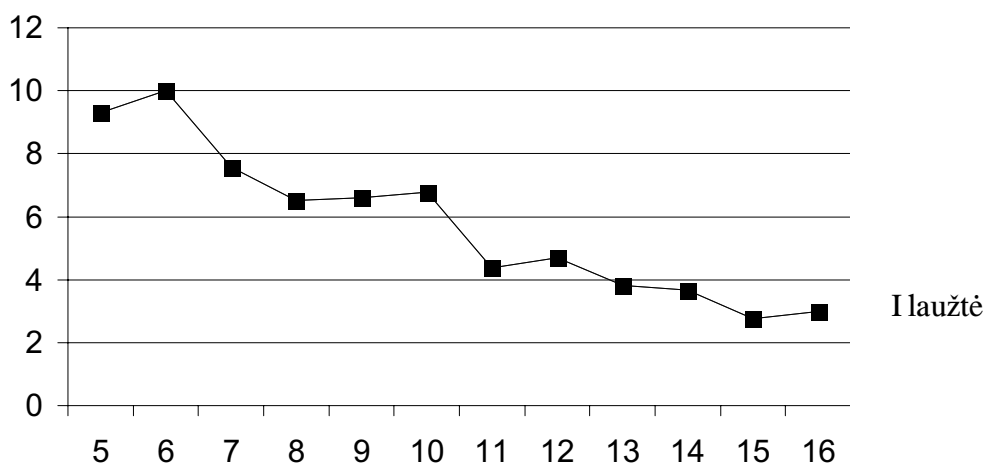
4.1 pav.

Taip pat pastebima priklausomybės tendencija - didėjant derlingumui savikaina mažėja. Kiekvienai derlingumo reikšmei apskaičiuokime vidutinę savikainą. Gausime tokią lentelę:

4.1 lentelė

Derlingumas	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Vidutinė savikaina	9,3	10	7,57	6,5	6,6	6,78	4,37	4,7	3,8	3,67	2,75	3

Pagal ją nubrėžta I laužtė (4.2 pav.) jau labiau išryškina tą savikainos mažėjimo tendenciją.



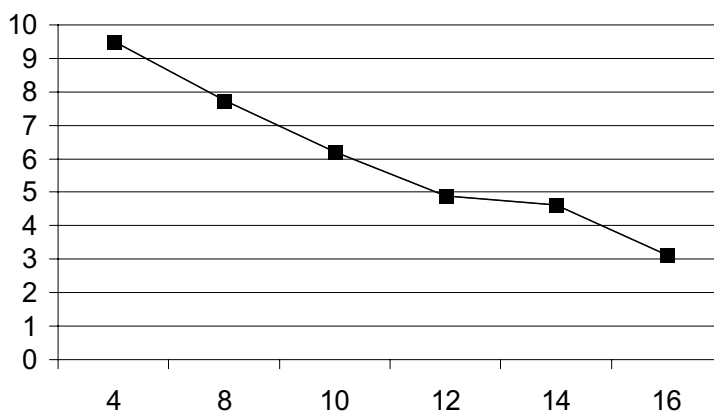
4.2 pav.

Suskirstykime intervalais atskirai derlingumo reikšmes x , savikainos reikšmes y ir sudarykime koreliacinę lentelę

4.2 lentelė

X \ Y	Y				
	Iki 3	3-5	5-7	7-9	9-11
5-7				1	3
7-9			3	3	2
9-11		4	9	6	
11-13		12	4	2	
13-15		10	2	1	
15-17	3	4			

Apskaičiavę vidutines y reikšmes kiekvienam x reikšmių intervalui, gausime taškus (4; 9,5), (8; 7,75), (10; 6,21), (12; 4,89), (14; 4,61), (16; 3,14), kurie dar labiau paryškina y priklausomybę nuo x (II-ji laužtė) (4.3 pav.)



II lauztė

4.3 pav.

Statistikoje koreliacinė priklausomybė yra reiškia regresijos lygtimis. Paprasčiausios priklausomybės formos yra:

tiesinė, reiškia lygtimi $\bar{y}_x = ax + b$,

atvirkštinė - $\bar{y}_x = a + \frac{b}{x}$,

kvadratinė - $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$,

laipsninė - $\bar{y}_x = ax^b$,

rodiklinė - $\bar{y}_x = ab^x$.

Parametrai a , b , c apskaičiuojami mažiausių kvadratų metodu pagal statistinius duomenis.

Tiesinės priklausomybės stiprumą charakterizuoja *koreliacijos koeficientas* r , apskaičiuojamas pagal formulę

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} \quad (4.1)$$

$$\text{Čia } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j; \quad (4.2)$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}; \quad (4.3)$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n x_i y_j. \quad (4.4)$$

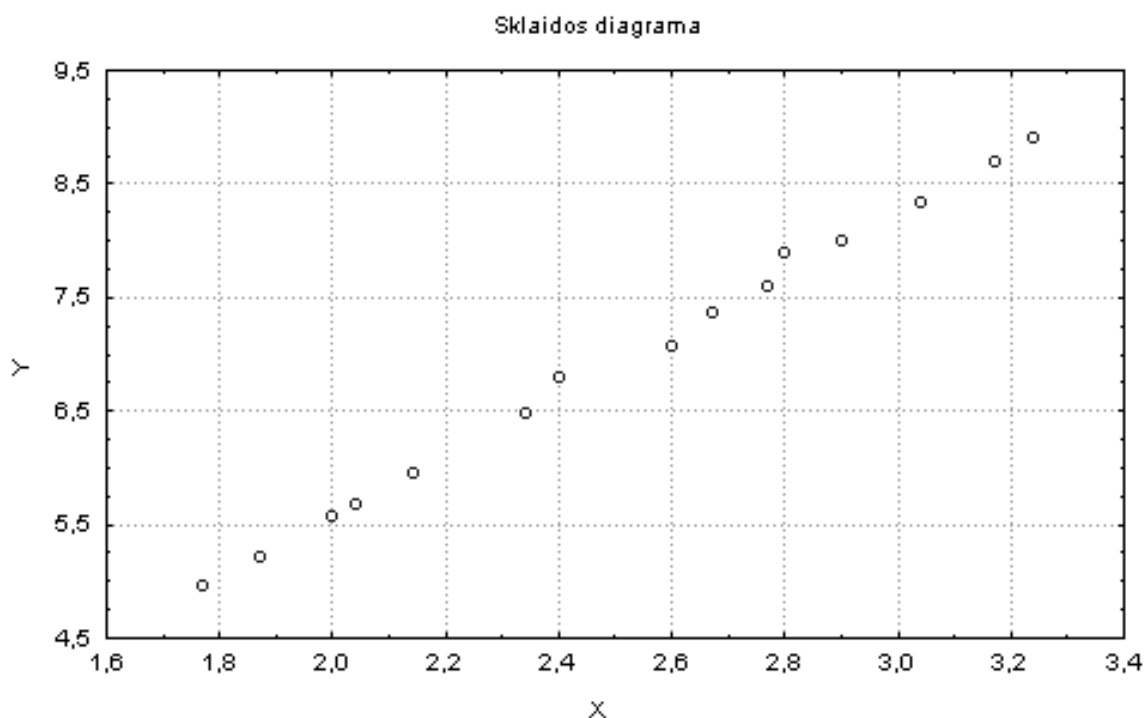
Koreliacijos koeficiento reikšmės tenkina nelygybę $-1 \leq r \leq 1$. Kuo $|r|$ reikšmė artimesnė vienetui, tuo stipresnė yra tiesinė koreliacija.

Pavyzdžiai:

4.1. pavyzdys. Duota imtis

(1,77; 4,96)	(1,87; 5,22)	(2,00; 5,57)	(2,04; 5,68)
(2,14; 5,95)	(2,34; 6,48)	(2,40; 6,80)	(2,60; 7,07)
(2,67; 7,36)	(2,77; 7,60)	(2,80; 7,90)	(2,90; 8,00)
(3,04; 8,35)	(3,17; 8,70)	(3,24; 8,90)	

Ją pavaizduojame taškais koordinacių plokštumoje. Gauname tokią sklaidos diagramą:



4.4 pav.

Apskaičiuojame vidurkius ir vidutinius kvadratinius nuokrypius:

$$\bar{x} = \frac{1,77 + 1,87 + 2 + 2,04 + 2,14 + 2,34 + 2,4 + 2,6 + 2,67 + 2,77 + 2,8 + 2,9 + 3,04 + 3,17 + 3,24}{15} = 2,52;$$

$$\overline{xy} = \frac{1,77 \cdot 4,96 + 1,87 \cdot 5,22 + \dots + 3,24 \cdot 8,9}{15} = 18,1125;$$

$$\bar{y} = \frac{4,96 + 5,22 + 5,57 + 5,68 + 5,95 + 6,48 + 6,8 + 7,07 + 7,36 + 7,6 + 7,9 + 8 + 8,35 + 8,7 + 8,9}{15} = \frac{104,54}{15} = 6,97;$$

$$s_x^2 = 6,566 - 6,3504 = 0,2156; \quad s_x = 0,464;$$

$$s_y^2 = 50,1145 - 48,5809 = 1,5336; \quad s_y = 1,238.$$

Taikydami formulę (4.1), apskaičiuojame koreliacijos koeficientą:

$$r = \frac{18,1125 - 17,5644}{0,464 \cdot 1,238} = \frac{0,5481}{0,5744} = 0,954.$$

Kadangi $r = 0,954$, tai yra stipri tiesinė koreliacija, vadinasi, regresijos kreivė bus tiesė.

Tiesinės regresijos lygtis yra tokia:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}). \quad (4.5)$$

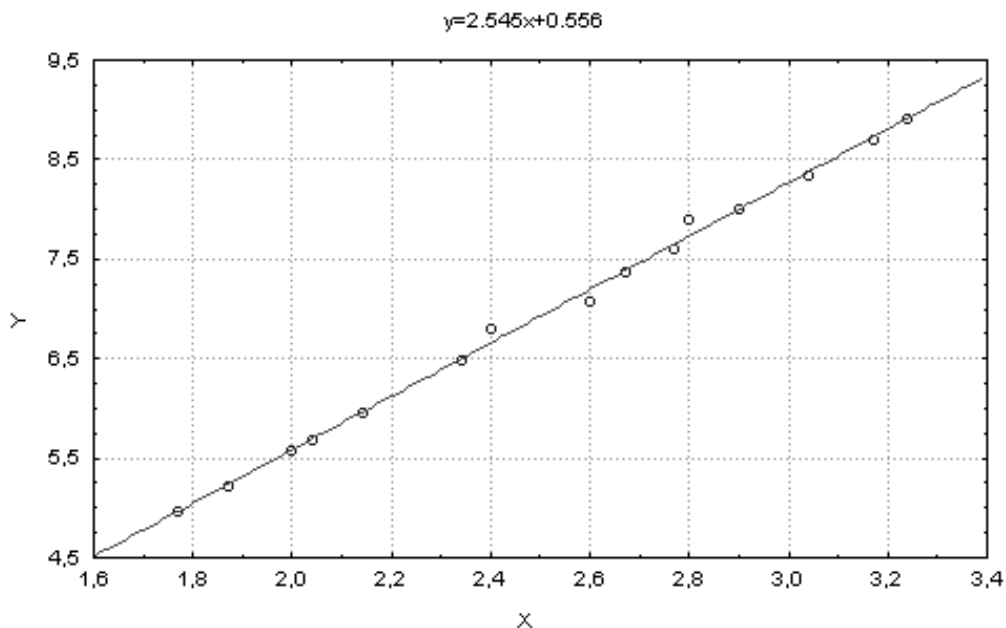
Ji išreiškia y priklausomybę nuo x . Įrašę apskaičiuotas reikšmes į (4.5), gauname, kad

$$\bar{y}_x - 6,97 = 0,954 \frac{1,238}{0,464} (x - 2,52).$$

Iš čia

$$\bar{y}_x = 2,545x + 0,556. \quad (4.6)$$

Nubrėžkime šią tiesę kartu su sklaidos diagrama, (4.5 pav.)



4.5 pav.

Pastaba. Kaip jau minėta, tiesinė priklausomybė reiškia regresijos lygtimi $\bar{y}_x = ax + b$, Jos parametrai a ir b apskaičiuojami mažiausių kvadratų metodu. Tam reikia spręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases}$$

kurią išsprendę gauname, kad

$$a = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = r \cdot \frac{s_y}{s_x};$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x}.$$

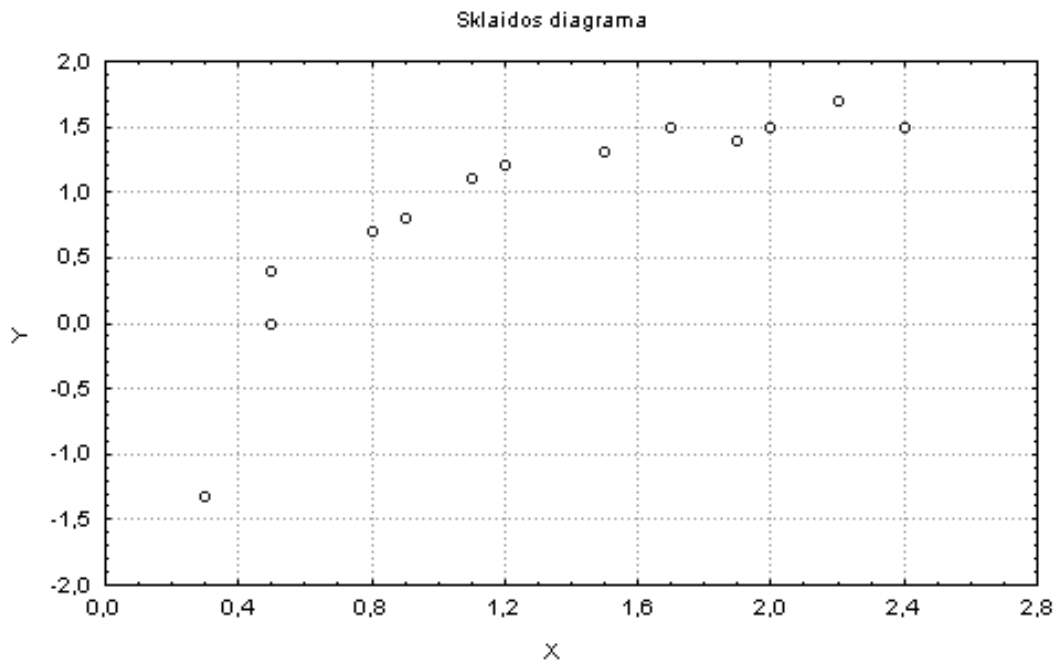
Įrašę a ir b reikšmes į lygtį $\bar{y}_x = ax + b$, gausime (4.5) lygtį.

4.2 pavyzdys.

Duota imtis, kurią sudaro požymių X ir Y poros (x, y) :

X	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,2	1,5	1,7	1,9	2,0	2,2	2,4
Y	-1,33	0	0,4	0,7	0,8	1,1	1,2	1,3	1,5	1,4	1,5	1,7	1,5

Rasime regresijos lygtį, išreiškiančią y priklausomybę nuo x . Šių duomenų sklaidos diagrama pavaizduota 4.6 pav.



4.6 pav.

Ieškome regresijos lygties pavidalo

$$\bar{y}_x = a + \frac{b}{x} \quad (4.7)$$

Norint surasti a ir b mažiausių kvadratų metodu, reikia spręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} a + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ a \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \end{cases} \quad (4.8)$$

Pagal duomenis randame, kad

$$\frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} \frac{1}{x_i} = 1,09661; \quad \bar{y} = 0,90538;$$

$$\frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} \frac{1}{x_i^2} = 1,84135;$$

$$\frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} \frac{y_i}{x_i} = 0,35622.$$

Įrašę į (4.8), gauname sistemą

$$\begin{cases} a + 1,09661b = 0,90538 \\ 1,09661a + 1,84135b = 0,35662 \end{cases}$$

Ją išsprendę gauname, kad

$$a=1,991, \quad b=-0,996$$

Vadinasi, regresijos lygtis yra

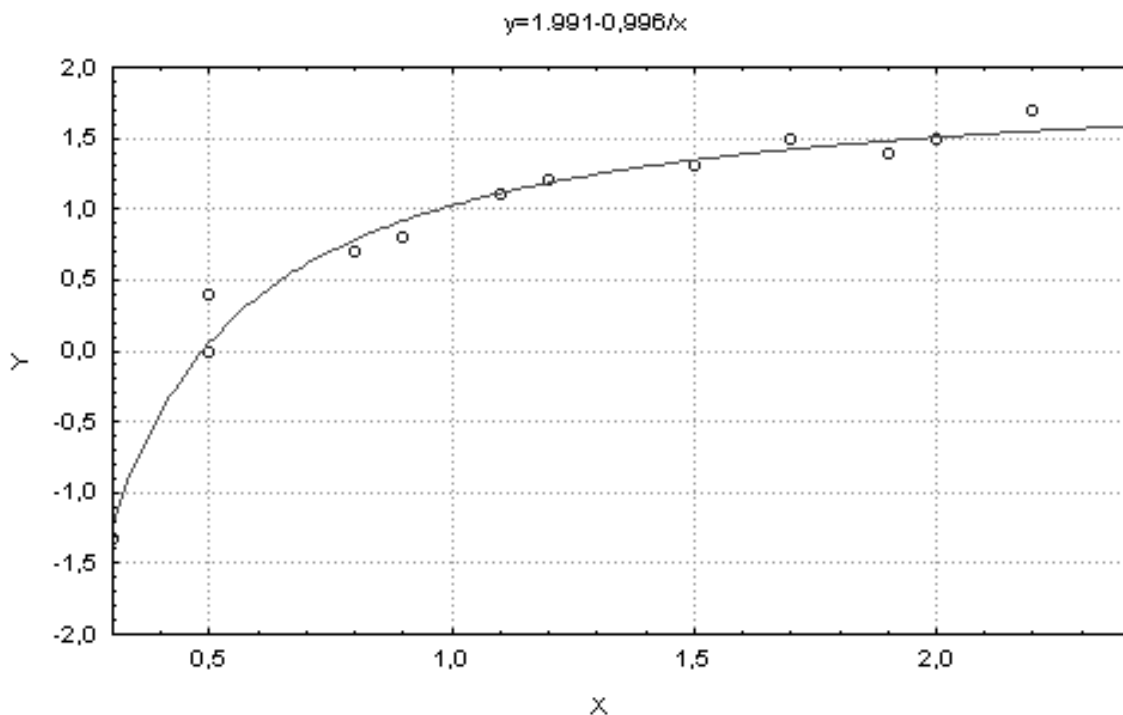
$$\bar{y}_x = 1,991 - \frac{0,996}{x}$$

Norėdami įsitikinti, kaip gautoji regresijos lygtis atitinka duomenis, sudarome funkcijos

$$y = 1,991 - \frac{0,996}{x} \text{ reikšmių lentelę}$$

x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
y	-1,329	0,331	0,884	1,161	1,327	1,438	1,517	1,576

Per šiuos taškus brėžiame kreivę kartu su sklaidos diagrama.



4.7 pav.

Turint daug duomenų, jie grupuojami ir sudaroma koreliacinė lentelė. Jeigu pasikartojančių porų nedaug, grupuojama intervalais (žr. 4.2 lentelę). Jeigu skirtingų porų nedaug, lentelėje nurodomos skirtingos x reikšmės x_1, x_2, \dots, x_m , skirtingos y reikšmės y_1, y_2, \dots, y_n , išdėstytos didėjančia tvarka ir porų (x_i, y_j) dažniai n_{ij} (4.3 lentelė):

4.3. lentelė

$Y \backslash X$	y_1	y_2	...	y_n
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1n}
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
x_m	n_{m1}	n_{m2}	...	n_{mn}

Sumuodami lentelės eilutėje esančius dažnius, gauname x reikšmių dažnius n_{x_i} , sumuodami stulpeliuose - y reikšmių dažnius n_{y_j} . Taigi, surašius dažnius, koreliacinėje lentelėje 4.3 pridedama dar viena eilutė ir vienas stulpelis ir gaunama 4.4 lentelė.

$Y \backslash X$	y_1	y_2	...	y_n	n_x
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1n}	n_{x_1}
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2n}	n_{x_2}
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	
x_m	n_{m1}	n_{m2}	...	n_{mn}	n_{x_m}
n_y	n_{y_1}	n_{y_2}		n_{y_n}	n

Paskutiniame stulpelyje ir paskutinėje eilutėje yra požymių reikšmių skirstiniai pagal kiekvieną požymį atskirai. Turi būti

$$n_{x_1} + n_{x_2} + \dots + n_{x_m} = n_{y_1} + n_{y_2} + \dots + n_{y_n} = n.$$

Vidurkiai \bar{x} , \bar{y} ir \overline{xy} skaičiuojami pagal formules:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_{x_i} \cdot x_i, \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n n_{y_j} \cdot y_j, \\ \overline{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n n_{ij} x_i y_j. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dispersijos s_x^2 ir s_y^2 - pagal formules

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_{x_i} (x_i - \bar{x})^2, \\ s_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n n_{y_j} (y_j - \bar{y})^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.3. pavyzdys.

Duota sugrupuota imtis

Y \ X	65	76	86	95
25				1
29			1	5
33		3	12	6
41	2	22	6	
45	9	2		
50	1			

Rasime regresijos lygtį.

Sudarome kitą koreliacinę lentelę papildydami ją dar viena eilute ir stulpeliu:

4.5 lentelė.

Y \ X	65	76	86	95	n_x
25				1	1
29			1	5	6
33		3	12	6	21
41	2	22	6		30
45	9	2			11
50	1				1
n_y	12	27	19	12	70

Apskaičiuojame pagal formules (4.8) ir (4.9) vidurkius \bar{x} , \bar{y} ir \overline{xy} vidutinius kvadratinius nuokrypius s_x , s_y :

$$\bar{x} = \frac{25 \cdot 1 + 29 \cdot 6 + 33 \cdot 21 + 41 \cdot 30 + 45 \cdot 11 + 50 \cdot 1}{70} = 38,1 \approx 38;$$

$$\bar{y} = \frac{65 \cdot 12 + 76 \cdot 27 + 86 \cdot 19 + 95 \cdot 12}{70} = 80,0857 \approx 80;$$

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{25 \cdot 95 + 29 \cdot 86 + 29 \cdot 95 \cdot 5 + 33 \cdot 76 \cdot 3 + 33 \cdot 86 \cdot 12 + 33 \cdot 95 \cdot 6}{70} + \\ &+ \frac{41 \cdot 65 \cdot 2 + 41 \cdot 76 \cdot 22 + 41 \cdot 86 \cdot 6 + 45 \cdot 65 \cdot 9 + 45 \cdot 76 \cdot 2 + 50 \cdot 65}{70} = 3006,957; \end{aligned}$$

$$s_x^2 = \frac{(25-38)^2 \cdot 1 + (29-38)^2 \cdot 6 + (33-38)^2 \cdot 21 + (41-38)^2 \cdot 30 + (45-38)^2 \cdot 11 + (50-38)^2 \cdot 1}{70} =$$

$$= 30,471; \quad s_x = 5,520;$$

$$s_x^2 = \frac{(65-80)^2 \cdot 12 + (76-80)^2 \cdot 27 + (86-80)^2 \cdot 19 + (95-80)^2 \cdot 12}{70} = 93,0857;$$

$$s_y = 9,648.$$

Apskaičiuojame koreliacijos koeficientą

$$r = \frac{3006,957 - 3040}{5,520 \cdot 9,648} = \frac{-33,043}{53,257} = -0,62.$$

Įrašę gautąsias reikšmes į (4.5) formulę, surandame tiesinės regresijos lygtį:

$$\bar{y}_x - 80 = -0,62 \cdot \frac{9,648}{5,520} (x - 38).$$

Ją pertvarke gauname, kad

$$\bar{y}_x = -1,084x + 121,192 .$$

4.4 pavyzdys.

Duota imtis

X	4,17	4,23	4,40	4,49	4,63	4,73	4,73	4,80	4,87
Y	29,88	30,93	30,39	32,85	32,90	33,50	34,00	34,20	34,48
X	4,90	5,00	5,20	5,21	5,30	5,40	5,50	5,63	5,65
Y	36,13	35,60	36,80	36,83	37,20	38,10	38,80	39,45	39,70
X	5,67	5,85	5,90	6,00	6,15	6,20	6,25	6,28	6,40
Y	39,72	40,80	41,20	41,90	42,70	43,20	43,20	43,60	43,70
X	6,50	6,80	6,70	6,75	6,80	6,90	7,05	7,08	7,20
Y	45,15	45,80	46,70	46,70	46,90	47,80	48,40	48,90	49,50
X	7,10	7,10	7,30	7,35	7,50	7,60	7,68	7,80	7,85
Y	49,50	50,10	50,80	51,50	52,20	52,80	52,84	53,70	54,10
X	8,00	8,10	8,15	8,20	8,27	8,37	8,40	8,45	8,65
Y	55,00	55,10	56,50	56,50	56,78	57,40	58,20	58,40	59,40
X	8,70	8,80	8,90	8,90	9,00	9,17			
Y	59,40	60,20	60,90	61,70	62,20	62,68			

Čia $n=60$.

Sugrupuokime duomenis intervalais ir sudarykime koreliacinę lentelę. Tuo tikslu surandame

x_{\min} ir x_{\max} bei y_{\max} ir y_{\min} ir jų skirtumus:

$$x_{\min} = 4,17, \quad y_{\min} = 29,88$$

$$x_{\max} = 9,17, \quad y_{\max} = 62,68.$$

Kadangi $x_{\max} - x_{\min} = 9,17 - 4,17 = 5$, tai x -o reikšmės patogų skirstyti į 5 intervalus.

$y_{\max} - y_{\min} = 62,68 - 29,88 = 32,8$, tai y -o reikšmės suskirstysime į 4 intervalus.

Dalinių intervalų ilgiai:

$$h_x = \frac{9,17 - 4,17}{5} = 1; \quad h_y = \frac{62,68 - 29,88}{4} = 8,2.$$

x -o reikšmių intervalai ir jų vidurio taškai:

$$[4,17; 5,17) \quad 4,67,$$

$$[5,17; 6,17) \quad 5,67,$$

$$[6,17; 7,17) \quad 6,67,$$

$$[7,17; 8,17) \quad 7,67,$$

$$[8,17; 9,17] \quad 8,67,$$

y -o reikšmių intervalai ir jų vidurio taškai:

$$[29,88; 38,08) \quad 33,98,$$

$$[38,08; 46,28) \quad 42,18,$$

$$[46,28; 54,48) \quad 50,38,$$

$$[54,48; 62,68] \quad 58,58.$$

Užpildome koreliacinę lentelę, užregistruodami kiekvienos poros priklausomybę nurodytiems intervalams:

4.6 lentelė.

Y \ X	[29,88; 38,08) 33,98	[38,08; 46,28) 42,18	[46,28; 54,48) 50,38	[54,48; 62,68] 58,58	n_x
[4,17; 5,17) 4,67	IIIIII 11				11
[5,17; 6,17) 5,67	III 3	IIIIIIII 9			12
[6,17; 7,17) 6,67		IIII 6	IIII 6		12
[7,17; 8,17) 7,67			IIIIIIII 10	III 3	13
[8,17-9,17] 8,67				IIIIIIIIII 12	12
n_y	14	15	16	15	60

Skaičiuojame vidurkius, vidutinius kvadratinus nuokrypius bei koreliacijos koeficientą:

$$\bar{x} = \frac{4,67 \cdot 11 + 5,67 \cdot 12 + 6,67 \cdot 12 + 7,67 \cdot 13 + 8,67 \cdot 12}{60} = 6,72;$$

$$\bar{y} = \frac{33,98 \cdot 14 + 42,18 \cdot 15 + 50,38 \cdot 16 + 58,58 \cdot 15}{60} = 46,55;$$

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{4,67 \cdot 33,98 \cdot 11 + 5,67 \cdot 33,98 \cdot 3 + 5,67 \cdot 42,18 \cdot 9 + 6,67 \cdot 42,18 \cdot 6}{60} + \\ &+ \frac{6,67 \cdot 50,38 \cdot 6 + 7,67 \cdot 50,38 \cdot 10 + 7,67 \cdot 58,58 \cdot 3 + 8,67 \cdot 58,58 \cdot 12}{60} = 324,783; \end{aligned}$$

$$s_x^2 = 1,9475; \quad s_x = 1,396;$$

$$s_y^2 = 81,734; \quad s_y = 9,041;$$

$$r = \frac{324,783 - 6,72 \cdot 46,55}{1,396 \cdot 9,041} = \frac{11,967}{12,621} = 0,948.$$

Tiesinės regresijos lygtis yra

$$\bar{y}_x - 46,55 = 0,948 \cdot \frac{9,041}{1,396} (x - 6,72)$$

$$\text{arba } \bar{y}_x = 6,1396x + 5,292.$$

5. DINAMIKOS EILUTĖS

Dinamikos eilute (laiko eilute) yra vadinama vieno kokio nors požymio reikšmių seka, sudaryta iš to požymio reikšmių, gautų vienas po kito einančiais laiko t momentais arba laiko periodais:

Laikas	t_1	t_2	t_3	...	t_n
Požymio reikšmė	y_1	y_2	y_3	...	y_n

(5.1)

Jei $t_{i-1} - t_i = const.$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$,

tai dinamikos eilutė vadinama pilnąja. Priešingu atveju - nepilnąja.

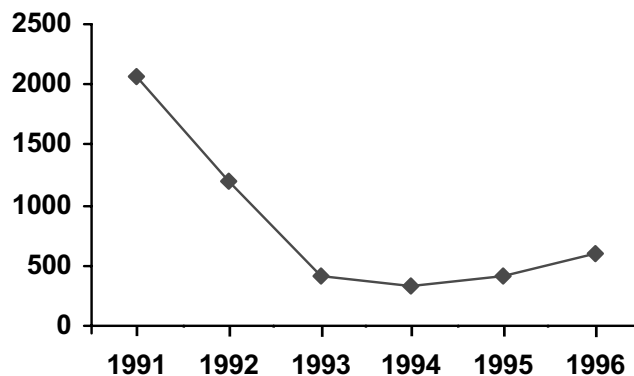
Viena atskirai paimta požymio reikšmė vadinama *dinamikos lygiu*.

Dinamikos eilutė gali būti duota lentele (5.1) arba grafiku. Braižant grafiką, x -ą ašyje atidedamas laikas, y -ą ašyje - dinamikos lygis.

Pavyzdys. Atvykusių iš užsienio šalių (išskyrus NVS šalis) į Lietuvą gyventojų skaičiaus pilnoji dinamikos eilutė yra tokia:

Metai	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Atvykusių gyventojų sk.	2084	1182	548	331	420	594

Pavaizduosime šiuos duomenis grafiškai:



5.1 pav.

Priklausomai nuo to, koks yra dinamikos lygių pobūdis laiko požiūriu (ar tai yra duomenys tam tikru laiko momentu, ar per tam tikrą laiko tarpą), dinamikos eilutės yra skirstomos į momentines eilutes ir intervalines eilutes. Dinamikos lygių atžvilgiu skirstomos į absoliučių dydžių, santykinų dydžių, vidurkių eilutes. Aukščiau pateikto pavyzdžio dinamikos eilutė yra absoliučių dydžių intervalinė eilutė.

Paprasčiausios dinamikos eilučių charakteristikos.

Paprasčiausios charakteristikos - tai dinamikos eilučių rodikliai, apibūdinantys dinamikos lygių kitimą. Dažniausiai yra skaičiuojami šie rodikliai: absoliutus padidėjimas, didėimo koeficientas, didėjimo tempas, tempo padidėjimas.

Absoliutus padidėjimas $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$ parodo keliais vienetais pasikeičia dinamikos lygis per laikotarpį nuo t_{i-1} iki t_i .

Didėjimo koeficientas $K_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}$, $i = 2, \dots, n$ parodo kiek kartų esamasis lygis y_i yra didesnis už praėjusį y_{i-1} .

Didėjimo tempas $T_i = K_i \cdot 100\%$ parodo kiek procentų sudaro esamasis lygis praėjusiojo atžvilgiu.

Tempo padidėjimas $T_{pi} = T_i - 100\%$ parodo keliais procentais pasikeičia dinamikos lygis per nagrinėjamą laikotarpį.

Atsižvelgiant į tyrimų tikslą, šios charakteristikos gali būti skaičiuojamos vieno kurio nors lygio, vadinamo pastovia baze, atžvilgiu. Jeigu pastovia baze imamams pirmasis dinamikos lygis y_1 , tai

$$\Delta y_i = y_i - y_1,$$

$$K_i = \frac{y_i}{y_1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Viso laikotarpio dinamiką apibūdina vidutiniai dydžiai: *vidutinis lygis*, *vidutinis absoliutus padidėjimas*, *vidutinis didėjimo koeficientas*.

Intervalinių eilučių *vidutinis lygis* \bar{y} apibrėžiamas lygybe

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (5.2)$$

o momentinių eilučių - lygybe

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1} \quad (5.3)$$

Momentinių eilučių vidutinis lygis dar yra vadinamas chronologiniu vidurkiu. Formulę (5.3) galima taikyti tik tada, kai momentinė eilutė yra pilnoji.

Vidutinis absoliutus padidėjimas $\bar{\Delta}$ - tai absoliučių padidėjimų aritmetinis vidurkis:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n-1} \sum \Delta y_i \quad (5.4)$$

Vidutinis didėjimo koeficientas \bar{K} yra skaičiuojamas kaip geometrinis $K_i, i=2, \dots, n$ vidurkis

(jei $K_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}$):

$$\bar{K} = \sqrt[n-1]{K_2 \cdot K_3 \cdot \dots \cdot K_n} \quad (5.5)$$

Dinamikos eilučių išlyginimas.

Nagrinėjant dinamikos eilutes, stengiamasi surasti dinamikos lygių kitimo tendenciją (jei tokia yra), kadangi ta tendencija yra užslėpta dėl atsitiktinių dinamikos lygių svyravimų.

Pagrindinei kitimo tendencijai paryškinti gali būti taikomi įvairūs metodai. Paprasčiausias iš jų, kuris gali būti taikomas absoliučių dydžių intervalinėms eilutėms yra eilutės lygių perskaičiavimas ilgesniems laikotarpiais. Jei pradinės eilutės duomenų laikotarpiai yra mėnesiai, galima perskaičiuoti ketvirčiams, pusmečiams arba metams. Kitas metodas - tai slenkamųjų vidurkių metodas, kurio esmė yra ta, kad pradiniai eilutės lygiai yra pakeičiami nelyginio skaičiaus gretimų lygių vidurkiais, t. y. y_i yra keičiamas

$$y_{sl.i} = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3},$$

kai slenkamajam vidurkiui skaičiuoti imamas trejų metų pagrindas, arba

$$y_{sl.i} = \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5},$$

kai slenkamajam vidurkiui skaičiuoti imamas penkerių metų pagrindas.

Taikant šį metodą, prarandama dalis informacijos, nes nėra kuo pakeisti kraštinių eilutės lygių, tačiau pati dinamikos eilutė yra išlyginama.

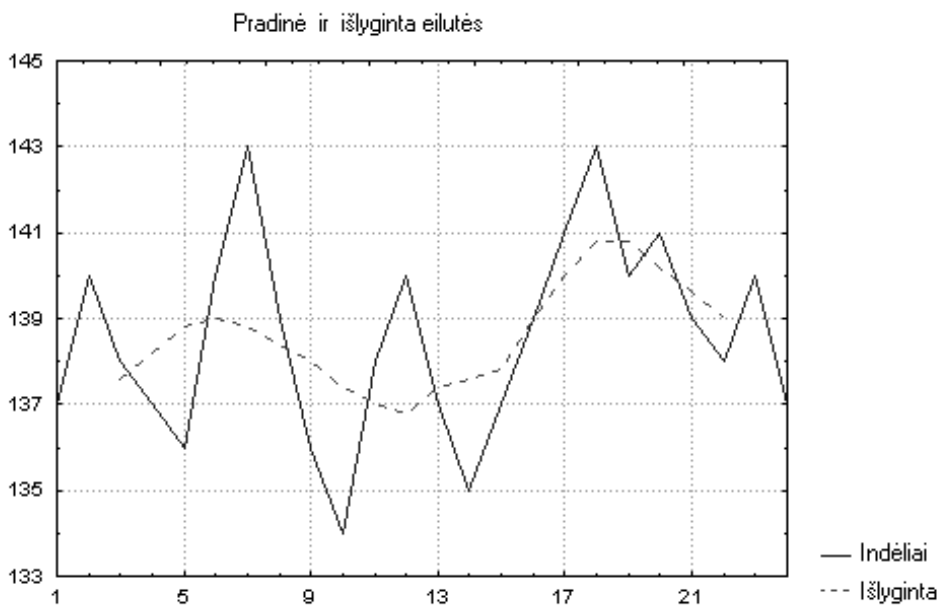
Pavyzdys. Lietuvos komercinių bankų priimtų terminuotų indėlių (mln. litų) 1995 -1996 m. duomenys.

Mėnesiai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1995	137	140	138	137	136	140	143	139	136	134	138	140
1996	137	135	137	139	141	143	140	141	139	138	140	137

Išlyginsime šią eilutę pakeisdami jos lygius penkerių mėnesių slenkamaisiais vidurkiais.

Mėnesiai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1995			137,6	138,2	138,8	139,0	138,8	138,4	138,0	137,4	137,0	136,8
1996	137,4	137,6	137,8	139,0	140,0	140,8	140,8	140,2	139,6	139,0		

Pradinės ir išlygintos eilutės grafikai pavaizduoti 5.2 pav.



5.2 pav.

Tolesnei dinamikos eilučių analizei naudojami jau išlyginti duomenys.

Vienas iš dinamikos eilučių modelių yra toks:

$$y(t) = f(t) + z(t) + \varepsilon(t) \quad (4.6)$$

Čia $f(t)$ - pagrindinė ykitimo tendencija, vadinama trendu, $z(t)$ - sezoninė komponentė, $\varepsilon(t)$ - atsitiktiniai nuokrypiai. Nustačius šias komponentes, galima prognozuoti ykitimą netolimoje ateityje.

Trendas, nusakantis pagrindinę dinamikos lygių kitimo tendenciją, yra randamas naudojant regresinę analizę.

Paprasčiausių trendų tipai yra:

$$y = at + b, \quad y = a \cdot b^t,$$

$$y = a + \frac{b}{t}, \quad y = a \cdot t^b,$$

$$y = at^2 + bt + c.$$

Parametrai a , b , c randami mažiausių kvadratų metodu

Tiesinis trendas, pavyzdžiui, taikomas tada, kai absoliutūs padidėjimai mažai skiriasi vienas nuo kito, o rodiklinis - kai didėjimo koeficientai mažai skiriasi vienas nuo kito.

Vertinant trendą, įvedamos sąlyginės t reikšmės. Pvz., nagrinėjama intervalinė dinamikos eilutė, kurios laiko intervalai yra metų ketvirčiai:

1996 m				1997 m			
I ketv.	II ketv.	III ketv.	IV ketv.	I ketv.	II ketv.	III ketv.	IV ketv.

Atitinkamos sąlyginės laiko t reikšmės gali būti parinktos taip:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4
arba							
1	2	3	4	5	6	7	8

Rastą regresijos lygtį (trendo funkciją) galima pritaikyti:

- 1) gauti išlygintoms reikšmėms, atitinkančioms nustatytą tendenciją,
- 2) gauti nežinomoms požymio reikšmėms nagrinėjamo laiko intervalo ribose,
- 3) prognozei.

Prognozė slenkamojo vidurkio metodu

Prognozės tikslas - nustatyti būsimus dinamikos eilutės lygius netolimoje ateityje. Dinamikos eilutėms, neturinčioms nei ryškaus trendo, nei sezoninės komponentės, gali būti prognozuojama slenkamojo vidurkio metodu.

Slenkamasis vidurkis, kurį žymėsime $\bar{x}_{sl.}$, dabar skaičiuojamas paskutinių n reikšmių sumą dalijant iš n .

Panagrinėkime pavyzdį. Lietuvos statistikos metraštyje 1998 pateikti tokie apie durpių gavybos Lietuvoje duomenys (tūkst. tonų):

1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
664	362	187	411	230	262	256

Skaičiuokime prognozę 3 metų slenkamojo vidurkio pagrindu. Pirmų trejų metų vidurkis yra

$$\bar{x}_{sl} = \frac{664 + 362 + 187}{3} \approx 404,3$$

Vadinasi, 404,3 tūkst. tonų durpių gavyba būtų prognozuojama 1994 metais. Užfiksuota 1994 m. reikšmė yra 411, taigi, prognozės paklaida būtų $411 - 404,3 = 6,7$.

1992-1994 slenkamasis vidurkis yra

$$\bar{x}_{sl} = \frac{362 + 187 + 411}{3} = 320$$

Tai 1995 metų prognozė būtų 320, o paklaida - $230 - 320 = -90$. Ir t.t.

Apskaičiuosime vidutinę kvadratinę paklaidą. Tuo tikslu paranku sudaryti lentelę:

5.1 lentelė

Metai	y reikšmė	Prognozė	Paklaida	Paklaidos kvadratas
1991	664			
1992	362			
1993	187			
1994	411	404,3	6,7	44,89
1995	230	320	-90	8100
1996	262	276	-14	196
1997	246	301	-55	3025
			Iš viso:	11365,89

Vidutinė kvadratinė paklaida $\frac{11365,89}{4} = 2841,5$.

Jeigu slenkamąjį vidurkį skaičiuotume dvejų metų pagrindu, gautume tokius rezultatus:

Metai	y reikšmė	Progozė	Paklaida	Paklaidos kvadrats
1991	664			
1992	362			
1993	187	513	-326	106276
1994	411	274,5	136,5	18632,25
1995	230	299	-69	4761
1996	262	320,5	-58,5	3422,25
1997	246	246	0	0
			Iš viso	133091,5

Šiuo atveju vidutinė kvadratinė paklaida yra $\frac{133091,5}{5} = 26618,3$. Ji žymiai didesnė už vidutinę kvadratinę paklaidą, kuri gauta slenkamąjį vidurkį skaičiuojant trejų metų pagrindu. Iš to sprendžiame, kad trejų metų slenkamasis vidurkis duoda prognozę, geriau atitinkančią realius duomenis. Todėl prognozuojamą 1998 metams durpių gavybos kiekį, geriau imti lygų paskutinių trejų metų vidurkiui, t.y. 246 tūkstančius tonų. Kiekvienu atveju n parinkimo kriterijus yra toks - jei slenkamasis vidurkis davė palyginti gerą prognozę praeityje, tai jis bus geras ir ateityje. Taigi, slenkamojo vidurkio ilgis yra parenkamas pagal vidutinę kvadratinę paklaidą.

PRAKTINIØ DARBØ UÞDUOTYS

1. Statistinių duomenų tvarkymas ir skaitinių charakteristikų skaičiavimas.

Sugrupuokite duomenis intervalais, nubrėžkite histogramą. Apskaičiuokite imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

1.1

124	141	133	140	137	120	132	137	153	130
141	126	119	125	148	138	121	133	136	148
130	143	134	119	145	134	144	132	144	133
137	157	136	129	143	137	140	140	135	119
124	151	127	158	156	125	133	132	121	135
136	125	134	150	136	125	142	139	145	142
129	141	128	117	148	148	156	128	139	131
136	122	139	137	134	124	148	136	121	135
145	124	132	132	143	141	122	144	141	127
131	146	119	111	139	148	125	135	121	134

1.2

339	349	305	315	327	315	325	305	343	309
337	305	303	339	315	305	321	322	323	322
313	324	337	325	313	313	365	357	363	303
323	311	335	393	363	382	305	367	299	305
382	369	305	299	369	291	341	329	317	323
303	342	293	343	322	323	291	333	299	297
297	299	325	339	353	327	305	333	323	319
361	313	332	332	305	317	333	283	343	339
343	323	325	326	303	329	355	331	317	325
335	351	335	325	333	341	325	315	327	324

1.3

86	93	99	98	99	83	85	79	97	88
78	97	89	91	82	93	90	93	83	73

82	83	87	81	85	86	95	93	76	93
87	92	73	82	91	89	90	77	98	89
74	89	84	84	80	91	89	90	89	75
84	85	86	80	83	101	79	85	81	87
94	91	85	85	92	85	93	79	95	98
80	76	77	85	80	84	95	73	85	78
72	78	78	92	80	75	87	85	86	87
88	84	87	90	82	94	79	90	85	88

1.4

44,8	44,8	40,4	50,4	49,6	44,4	44,4	45,4	47,2	43,8
50,6	46,4	45,2	45,8	41,4	41,4	45,0	47,1	50,2	48,1
44,2	46,3	49,6	44,2	46,2	50,4	53,6	53,2	46,2	49,4
50,2	41,0	52,4	44,2	45,2	48,1	49,1	47,6	40,8	47,4
51,1	53,8	45,4	43,8	48,8	39,0	48,0	50,8	41,6	47,2
46,2	48,1	47,2	53,2	46,1	49,2	43,0	45,2	48,8	45,6
41,6	43,8	50,4	43,8	50,2	44,6	45,8	40,4	46,2	49,2
48,0	41,2	49,1	43,4	46,4	42,6	43,2	38,6	44,2	45,8
44,2	50,2	46,4	44,5	42,2	48,8	53,4	52,0	46,6	45,4
44,4	54,0	49,4	46,4	48,2	44,0	51,4	44,4	42,6	45,3

1.5

28,6	27,1	32,7	28,5	29,4	26,3	33,0	30,1	30,7	29,1
28,9	28,6	29,6	29,5	31,3	30,3	29,1	30,1	29,8	28,6
30,1	28,4	27,6	29,6	27,6	26,3	30,3	29,1	30,4	26,6
30,3	27,6	31,6	32,3	27,6	28,6	27,1	31,9	28,6	29,6
31,1	30,1	31,1	30,1	31,9	28,1	29,1	31,1	27,1	26,6
28,0	31,1	27,2	31,5	31,9	31,5	33,0	29,4	26,6	28,6
31,2	28,6	28,6	28,6	27,0	32,4	29,6	30,6	28,6	29,1
31,2	30,5	28,6	30,2	27,6	29,1	29,2	29,6	30,6	28,6
28,0	28,8	32,7	31,3	28,6	30,6	27,3	26,6	29,5	29,0
28,0	29,0	29,4	30,2	27,9	28,8	29,5	28,5	29,8	29,2

1.6

2,26 3,32 2,83 2,42 1,79 2,50 1,68 1,98 2,36 3,01
2,54 2,20 3,36 2,55 2,54 2,47 3,14 3,27 1,42 1,57
2,44 3,40 2,68 2,65 3,09 2,29 1,20 2,15 1,38 3,01
3,03 2,69 3,25 2,84 1,81 1,65 1,78 1,54 2,41 1,94
2,88 3,04 1,86 1,80 3,20 2,32 3,16 2,34 1,79 3,06
2,54 2,49 3,04 1,75 2,78 3,13 3,38 3,95 2,20 2,68
2,57 2,52 1,71 3,02 1,47 2,25 2,64 3,32 2,13 3,27
3,04 2,37 2,59 2,53 3,23 2,16 2,32 4,17 2,60 2,24
2,18 1,69 1,82 2,32 3,66 2,49 2,41 1,14 3,51 2,42
2,74 1,97 2,27 1,56 3,18 3,75 1,79 1,08 2,18 2,96

1.7

34,8 40,6 34,2 40,2 41,1 36,2 31,6 38,0 34,2 34,4
34,8 36,4 36,3 31,0 43,8 38,1 33,8 31,2 40,2 44,0
30,4 35,2 39,6 42,4 35,4 37,2 40,4 39,1 36,4 39,4
40,4 35,8 39,4 34,2 33,8 43,2 33,8 33,4 34,6 36,4
39,6 31,4 34,2 35,2 38,8 36,1 40,2 36,4 32,2 38,2
34,4 31,4 36,2 38,1 29,0 39,2 34,6 32,6 38,8 34,0
34,4 35,0 40,4 39,1 38,0 33,0 35,8 33,2 43,4 41,4
35,4 37,1 43,6 37,6 40,8 35,2 30,4 28,6 42,0 34,4
37,2 40,2 43,2 30,8 31,6 38,8 36,2 34,2 36,6 32,6
33,8 38,1 36,2 37,4 37,2 35,6 39,2 35,8 35,4 35,3

1.8

54,5 55,4 50,5 51,4 53,4 51,7 52,8 50,4 54,2 50,8
53,7 50,7 50,3 54,4 52,2 50,3 52,1 52,8 52,8 52,2
51,8 52,5 54,4 52,5 51,3 51,4 57,3 56,2 57,1 50,9
52,9 51,6 53,6 59,6 56,2 58,7 50,8 57,5 49,8 50,4
58,5 57,3 50,6 50,3 57,1 49,4 54,9 53,4 52,2 52,9
50,9 54,8 59,9 54,8 52,5 54,0 49,6 53,7 49,9 50,2
50,2 50,3 53,1 54,5 55,5 53,1 52,2 51,0 53,7 52,3

56,5 52,0 53,7 53,4 50,5 51,6 53,7 48,2 54,5 54,3
55,1 53,0 52,6 53,0 50,7 53,2 56,1 53,4 51,8 52,6
53,8 55,9 53,5 52,5 53,7 54,2 52,6 52,2 52,9 52,5

1.9

33,8 32,9 31,7 32,5 38,3 30,5 29,8 35,7 34,9 33,5
35,3 30,5 32,0 31,2 37,0 34,4 29,9 31,2 27,4 35,2
30,4 29,7 33,5 32,8 30,3 29,5 32,6 33,5 31,6 33,4
30,9 33,4 32,2 29,4 29,9 34,3 34,0 32,8 32,6 32,0
32,9 31,8 31,0 35,6 36,7 32,0 35,0 29,5 29,9 33,2
31,2 30,3 30,4 38,2 29,1 33,9 32,7 30,7 33,1 33,6
31,9 31,9 36,9 30,3 34,5 29,1 31,4 32,8 35,6 32,0
30,1 32,2 35,4 36,5 33,0 33,2 30,4 27,5 32,5 31,2
33,5 31,8 36,9 29,2 31,7 29,4 33,1 34,4 31,5 32,5
30,7 31,8 30,3 30,3 32,4 29,7 31,7 33,8 31,9 31,7

1.10

453 454 458 492 456 472 474 462 481 438
472 502 532 408 416 488 462 442 466 426
454 471 536 476 508 452 404 386 520 444
514 534 432 458 430 480 491 504 450 444
448 506 442 502 511 462 416 480 442 444
448 464 463 410 538 481 438 412 502 540
494 464 491 504 472 454 524 496 452 404
504 458 494 442 438 532 438 434 445 464
482 422 464 502 461 488 452 442 414 496
444 414 462 481 390 492 446 426 488 440

1.11

335 352 334 320 332 336 320 312 325 317
319 315 325 356 331 299 326 316 274 349
357 312 335 328 307 295 328 275 344 338
317 331 304 314 327 350 340 326 299 298

307 335 301 319 312 329 309 304 353 338
318 318 322 319 303 318 334 297 305 329
317 320 335 323 310 304 369 355 369 304
303 292 365 303 282 356 294 328 312 325
324 317 330 345 291 367 299 303 370 373
305 344 295 343 320 339 291 332 294 297

1.12

67,9 63,6 67,0 60,2 68,6 64,0 63,8 68,9 67,3 66,9
61,8 64,4 63,1 60,8 69,3 62,0 66,9 65,3 60,0 66,9
62,3 61,3 61,3 60,9 65,8 68,1 62,2 62,2 63,0 68,7
64,0 66,5 60,3 66,4 63,9 63,8 62,4 62,4 61,2 61,0
68,9 66,5 60,7 65,2 60,2 68,1 65,4 65,2 69,2 65,2
66,7 69,5 68,0 60,4 65,6 66,6 65,0 60,2 62,1 61,3
62,6 60,7 66,3 67,5 69,0 64,0 67,1 64,7 68,9 60,7
69,9 60,2 63,1 63,1 68,3 63,9 63,9 68,8 65,4 60,2
68,0 68,6 62,5 62,6 62,2 60,3 61,7 64,5 65,4 60,7
65,3 68,1 68,7 69,9 61,4 60,3 60,9 65,5 65,0 63,0

1.13

190 366 109 222 366 100 382 292 339 199
184 240 310 187 238 209 192 231 302 195
235 132 132 291 382 116 227 227 309 284
107 250 339 143 392 383 241 240 127 109
294 250 277 223 224 211 243 222 222 227
376 359 305 342 361 369 309 323 312 333
260 172 135 152 108 113 173 193 178 105
291 202 315 315 235 393 399 289 245 222
305 361 355 360 323 339 177 358 343 375
137 113 170 194 147 136 190 153 108 307

1.14

79,0 36,6 70,9 2,2 86,6 40,0 38,2 89,2 73,9 69,9
18,4 44,0 31,0 28,7 93,8 20,9 69,2 53,1 0,2 69,5
23,5 13,2 13,2 9,1 56,2 81,6 22,7 22,7 30,9 87,4
40,7 65,0 3,9 64,3 39,2 38,3 24,1 24,0 12,7 10,9
89,4 65,0 7,7 52,3 2,4 81,1 54,3 52,2 92,2 52,7
67,6 95,9 80,5 4,2 56,1 66,9 50,9 2,3 21,2 13,3
26,0 7,2 63,5 75,2 90,5 40,8 71,3 47,3 89,3 7,8
99,1 60,2 31,5 83,5 39,3 39,9 88,9 54,5 2,2 31,5
80,5 86,1 25,5 26,0 22,3 3,9 17,7 45,8 54,3 27,5
53,7 81,3 87,0 99,4 14,7 3,6 9,0 55,3 50,8 30,7

1.15

70,9 32,1 39,0 98,9 76,9 70,0 47,9 3,7 72,9 77,5
82,6 1,3 16,1 80,6 25,6 90,6 85,7 72,3 63,4 58,7
50,3 57,8 29,9 88,2 29,8 85,7 71,3 40,6 34,3 90,0
70,7 27,2 25,9 97,1 34,6 96,7 24,1 54,5 55,2 70,2
0,0 55,5 17,8 9,4 73,5 92,7 32,2 41,4 53,3 26,8
18,3 22,7 22,3 14,6 37,0 51,6 86,8 98,0 55,2 81,5
44,8 51,4 23,6 43,1 91,7 10,3 38,2 65,0 96,0 9,7
49,3 36,0 29,0 68,6 79,1 20,5 71,9 55,6 80,1 43,4
0,0 71,4 43,7 7,1 33,3 67,2 45,9 56,9 9,6 30,8
9,5 0,3 44,6 25,9 97,7 49,1 31,5 26,1 2,0 70,0

1.16

71,1 35,6 18,9 34,7 98,2 59,7 33,5 91,6 13,7 16,1
70,9 30,9 11,0 53,3 27,7 38,3 82,3 94,7 79,6 32,9
56,9 12,7 48,1 16,9 96,7 25,7 91,9 13,8 18,8 34,4
92,4 25,5 86,9 78,8 71,0 34,3 89,7 63,2 53,8 37,9
72,8 75,1 29,2 72,8 56,0 49,5 38,8 93,6 55,0 65,3
13,4 12,9 74,0 13,3 71,7 50,1 53,2 24,1 54,4 51,2
78,9 16,2 72,6 71,6 48,9 26,0 99,0 77,0 71,2 39,0

99,0 81,9 83,7 25,3 82,2 90,9 92,2 22,3 13,5 11,5
65,5 26,6 29,7 84,7 49,0 28,6 58,6 48,7 20,5 72,4
65,3 32,7 42,8 86,5 90,0 70,8 30,0 90,3 77,2 56,4

1.17

133 117 112 184 144 114 142 175 142 136
171 152 113 114 141 163 169 193 156 104
135 116 175 147 194 181 175 138 193 161
103 132 147 192 128 157 133 170 121 191
110 136 132 138 190 179 130 100 127 125
189 158 139 103 122 110 146 157 147 188
127 113 145 150 169 192 128 166 127 121
107 150 163 168 165 103 183 148 106 185
163 157 120 160 195 172 121 192 125 191
103 199 183 126 106 185 176 163 158 148

1.18

120 181 173 184 154 163 171 134 195 185
158 136 140 130 112 193 148 104 144 133
168 175 144 127 124 163 160 197 134 183
160 197 133 162 144 124 172 162 144 103
116 174 123 138 158 144 126 103 187 121
190 174 102 195 102 129 183 104 138 174
115 148 114 141 160 101 116 185 165 106
128 147 181 175 147 189 166 121 103 196
112 197 145 154 154 148 122 114 133 166
133 165 116 185 156 101 111 159 178 115

1.19

64,8 65,8 66,3 67,6 68,5 60,6 62,6 68,3 69,9 60,3
69,1 62,5 69,2 62,1 67,2 69,5 66,0 62,0 65,7 66,3
68,5 60,6 64,8 68,3 60,3 66,5 66,8 66,3 65,0 60,7

62,1 62,7 66,6 62,8 69,2 66,9 65,0 64,5 61,3 62,7
68,8 64,7 65,7 64,6 61,0 62,2 60,3 63,9 65,8 68,9
62,5 62,7 60,0 63,0 67,9 69,0 63,8 63,2 63,6 61,0
69,1 62,1 67,0 63,3 65,7 62,8 69,2 64,7 63,2 60,3
66,0 69,3 63,8 67,5 68,1 69,4 64,7 67,5 61,6 63,5
60,4 65,6 69,3 66,9 66,3 64,1 61,4 61,3 65,2 67,1
64,2 67,5 64,2 63,6 61,4 64,4 68,4 61,2 61,7 63,3

1.20

21,5 27,8 25,9 21,1 20,1 25,6 28,5 21,6 26,5 23,3
26,6 23,3 21,4 22,2 24,8 25,4 25,4 24,5 29,7 21,2
29,6 20,3 22,1 26,6 28,9 24,7 27,5 28,1 24,7 22,8
20,6 26,5 28,5 21,6 20,1 26,0 24,1 21,4 24,8 21,5
27,4 23,8 20,4 28,3 22,9 20,2 29,5 20,2 27,4 29,0
22,1 28,7 20,3 22,6 24,4 25,8 23,8 22,3 27,4 21,6
20,3 24,4 26,2 27,2 22,4 24,4 26,2 23,3 29,7 26,0
28,3 23,4 29,7 26,0 26,3 22,4 22,7 24,4 27,5 26,8
23,3 24,4 20,4 24,8 29,3 21,2 23,0 24,0 23,6 25,8
22,0 28,1 27,3 28,4 28,5 29,5 23,4 27,1 26,3 25,4

1.21

54,8 51,3 51,8 52,1 59,0 59,2 53,2 55,7 52,5 58,4
55,4 56,2 59,4 56,6 52,9 58,7 51,0 54,3 50,0 51,7
54,1 56,4 57,8 59,7 53,8 58,0 56,2 54,4 51,7 59,2
53,0 51,1 56,3 56,8 57,7 57,6 51,1 55,6 59,3 54,3
59,2 52,2 51,4 52,9 58,3 52,2 51,8 52,7 53,6 54,9
52,9 57,4 50,9 53,1 52,2 52,1 58,9 56,3 55,5 57,4
51,7 50,6 59,6 50,8 56,2 54,6 55,9 57,8 57,4 52,2
50,9 57,5 53,8 58,8 52,7 52,4 56,0 59,3 55,9 57,2
57,4 51,6 58,7 50,8 58,5 56,5 50,4 54,5 55,6 50,9
53,6 54,9 53,1 52,3 54,6 58,0 55,0 55,2 51,3 59,9

1.22

70,0 74,5 74,4 71,7 82,0 85,9 74,3 79,7 74,8 80,4
79,3 84,3 84,4 81,4 72,7 83,3 76,6 84,0 72,3 73,2
74,2 78,0 84,6 77,0 83,2 83,8 77,9 72,8 75,2 82,9
82,7 72,2 71,7 81,3 81,2 77,9 79,2 71,2 77,9 83,8
77,6 76,0 78,2 80,8 85,4 84,3 80,1 71,9 75,1 77,8
81,1 76,5 71,7 70,2 71,2 79,8 76,0 70,2 81,3 82,1
79,6 72,8 74,4 72,3 74,3 80,0 75,7 71,2 79,0 79,5
78,5 77,4 81,1 77,0 82,7 73,9 71,0 83,4 78,4 74,3
79,8 77,3 79,1 80,8 83,2 75,6 80,9 79,6 71,0 73,5

1.23

19,3 45,9 57,4 21,1 86,9 41,1 45,6 49,9 49,8 46,9
87,0 33,2 65,5 69,7 36,1 31,0 14,6 37,7 68,6 78,8
14,2 27,8 39,8 15,9 66,2 23,2 35,6 20,5 73,0 80,8
59,6 72,3 63,0 49,6 42,2 72,5 68,4 74,5 14,6 37,4
60,3 87,2 25,4 84,9 54,8 60,7 22,2 11,0 53,5 31,2
17,6 46,7 74,3 79,4 41,1 46,3 65,6 10,6 33,9 11,2
57,8 30,3 32,6 50,6 65,1 74,5 14,6 37,3 58,7 51,1
75,9 45,9 56,0 88,3 32,7 53,3 27,3 29,7 84,6 77,9
57,8 31,2 19,4 46,6 73,1 81,3 71,0 35,2 61,6 17,7
21,4 24,3 59,0 58,8 52,8 14,8 42,1 68,8 82,7 31,2

1.24

225 190 148 196 104 159 203 134 167 140
235 106 144 148 203 122 198 233 124 118
180 145 168 129 143 147 117 200 180 160
102 136 131 169 227 224 161 103 162 250
187 120 239 209 230 233 239 168 165 202
203 218 220 183 210 210 195 232 170 115
143 168 131 146 188 246 123 162 177 180

149 103 211 156 186 125 243 136 136 135
105 221 173 149 224 225 190 148 196 166
215 223 145 148 237 141 113 134 102 234

1.25

334 202 234 213 241 337 248 245 323 315
266 296 248 290 325 324 249 273 321 205
235 236 236 343 225 286 256 311 203 249
280 277 262 223 346 288 246 231 268 243
215 270 332 295 310 283 320 318 303 310
302 265 268 339 333 330 309 339 220 287
350 262 203 261 324 327 269 231 236 202
260 280 300 217 247 243 229 268 245 280
218 224 233 298 222 303 248 244 206 335
240 267 234 303 259 204 296 248 290 325

1.26

2,0 2,8 0,8 4,0 2,9 0,3 1,0 1,7 0,3 2,4
5,2 1,9 0,8 0,0 2,3 0,4 5,2 3,3 0,7 4,7
0,3 0,0 3,0 1,5 3,1 0,8 0,7 1,1 2,3 2,5
0,8 0,0 1,4 2,0 5,9 0,2 1,7 1,6 2,7 3,0
4,9 0,4 0,7 1,2 2,0 2,7 0,3 0,0 3,4 5,4
0,8 2,6 1,7 1,4 0,9 0,4 1,4 0,9 3,1 1,6
0,4 3,6 0,4 0,5 2,6 1,0 1,2 2,6 1,5 0,1
0,7 3,7 4,3 2,9 0,9 0,5 1,7 1,4 3,0 0,5
3,6 2,8 0,5 2,2

1.27

2,38 0,86 4,80 3,53 1,79 0,51 0,13 0,00 2,32 3,64
0,94 1,41 2,22 1,05 0,96 1,92 0,01 1,42 4,96 2,11
6,98 4,38 3,44 2,19 1,22 0,78 1,85 0,14 5,27 3,11
3,59 1,89 0,87 1,18 1,56 0,85 0,56 1,54 6,35 0,77

1,02 2,67 3,63 0,74 1,12 0,75 2,98 0,14 0,69 0,95
5,81 3,38 2,79 1,47 0,04 0,35 1,65 4,71 1,43 0,72
4,12 2,28 0,34 1,41 2,34 2,09 3,23 5,71 2,40 2,46
4,47 3,76 2,71 0,73 0,99 1,32 32,320,29 0,68 0,13
1,47 1,79

1.28

2,02 3,93 0,54 1,37 2,75 0,52 4,07 1,85 2,11 1,81
7,74 0,95 1,57 1,14 2,75 0,91 5,09 3,43 5,02 1,08
0,41 1,74 6,25 0,25 1,19 4,55 6,36 1,73 2,13 3,41
2,38 3,85 5,46 5,38 3,30 3,92 7,55 0,98 0,55 0,58
1,42 2,86 2,68 5,73 2,09 1,25 1,15 3,43 0,03 0,21
7,76 5,48 0,31 1,00 1,00 2,72 2,49 3,13 0,57 0,10
4,43 4,29 1,33 1,26 0,40 0,56 3,83 6,58 4,54 0,03
0,07 0,06 2,83 0,41 0,43 2,92 0,76 2,40 0,86 0,01
0,11 0,65

1.29

2,3 1,0 0,2 0,4 3,7 2,6 1,0 1,7 1,5 2,6
3,6 2,9 0,3 0,5 0,8 0,3 1,9 5,0 2,0 2,5
5,0 4,8 1,8 2,1 0,5 0,1 0,2 0,7 4,7 3,4
1,8 1,6 0,0 0,4 1,2 1,3 0,8 0,6 5,8 5,3
3,3 2,9 3,6 1,4 1,4 0,8 0,6 0,4 1,6 4,4
4,4 0,2 2,2 2,8 1,1 1,7 0,4 0,1 2,7 4,1
3,1 0,8 0,6 0,9 1,5 0,6 3,2 0,4 0,7 1,4
0,6 2,4 3,2 0,1 0,5 0,2 0,8 0,6 1,8 2,7

1.30

1,7 1,0 0,6 0,6 1,4 2,9 3,5 0,9 2,5 5,1
4,2 3,7 3,7 2,3 1,4 1,6 1,5 0,8 0,8 0,4
0,8 1,8 1,0 2,5 2,2 3,6 4,2 2,8 3,3 5,3
4,2 0,8 1,5 2,7 3,2 3,3 5,9 1,2 2,6 1,1

0,3	0,7	1,7	2,7	3,6	2,4	0,1	0,7	0,6	0,5
4,5	3,4	2,1	1,9	2,8	1,8	3,4	3,0	1,4	0,5
0,9	0,4	1,7	1,9	2,6	1,3	0,9	0,3	0,9	4,5
3,5	1,8	1,2	0,9	0,8	0,6	0,8	1,0	0,3	0,0

2. Chi - kvadrato kriterijaus taikymas

Naudodami χ^2 kriterijų, patikrinkite hipotezę apie stebėto požymio skirstinį.

Duomenys 1.1. - 1.25 iš pirmosios užduoties.

3. Koreliacinė priklausomybė

Pavaizduokite duomenis grafiškai. Sudarykite koreliacinę lentelę. Apskaiciuokite koreliacijos koeficientą. Raskite regresijos lygtį.

Nr. 1

x	1.37	1.82	2.19	2.35	3.11	3.37	3.57	4.30	4.52	5.02
y	4.20	4.78	4.54	2.17	5.91	4.56	2.59	6.02	4.26	5.35

x	5.51	5.93	6.14	6.25	6.92	7.51	7.80	8.15	8.50	8.66
y	6.34	6.62	4.76	1.88	4.70	6.70	5.65	5.22	4.78	2.41

x	9.11	9.60	9.99	10.32	10.81	11.45	11.50	12.09	12.36	13.09
y	2.99	3.98	3.95	3.31	4.30	6.81	3.32	5.33	4.07	7.51

x	13.08	13.75	13.85	14.28	14.82	15.08	15.71	15.91	16.48	16.66
y	3.40	6.23	3.24	3.62	5.12	3.76	6.18	4.21	6.02	3.85

x	17.13	17.87	18.12	18.31	18.90	19.34	19.49	20.10	20.31	21.03
y	4.63	8.17	6.71	4.65	6.65	7.13	4.66	6.87	5.01	8.34

x	21.40	21.60	22.00	22.34	23.05	23.23	23.84	24.29	24.43	24.81
y	8.10	6.14	6.21	5.67	8.90	6.73	8.94	9.52	6.95	6.82

Nr. 2

x	3.30	3.82	3.91	4.69	4.99	5.36	5.67	6.05	6.36	7.04
y	12.28	15.03	12.20	18.33	18.22	19.02	19.05	19.98	20.00	24.83

x 7.22 7.89 8.08 8.32 8.79 9.33 9.63 10.00 10.29 10.80
y 23.17 27.86 26.33 25.44 27.54 30.55 30.45 31.25 31.01 33.63

x 11.53 11.67 12.23 12.29 12.94 13.14 13.92 14.21 14.49 14.90
y 39.11 36.93 40.20 36.97 41.41 40.01 46.13 45.90 45.53 46.85

x 15.19 15.90 16.33 16.61 16.89 17.41 17.90 17.86 18.58 18.75
y 46.62 51.83 53.41 53.05 52.68 55.43 57.79 53.27 58.62 56.83

x 19.18 19.91 20.33 20.50 20.84 21.51 21.53 22.31 22.56 23.10
y 58.41 63.88 65.33 63.54 63.95 68.65 64.91 71.03 70.28 73.29

x 23.16 23.86 24.32 24.33 24.66 25.51 25.65 26.03 26.32 27.07
y 70.07 75.15 77.12 73.25 73.54 80.57 78.39 79.32 79.08 84.82

Nr. 3

x 3.44 3.15 3.53 3.80 3.63 3.90 3.65 3.81 4.18 4.42
y 4.45 0.38 3.40 5.25 2.46 4.31 0.67 1.36 4.27 5.81

x 4.23 4.50 4.57 4.44 4.71 4.65 4.83 4.95 5.06 5.16
y 2.80 4.66 4.40 2.03 3.88 2.25 3.15 3.42 3.58 3.64

x 5.54 5.29 5.52 5.78 5.84 5.98 5.89 6.12 6.16 6.33
y 6.66 3.02 4.45 6.20 5.84 6.32 4.37 5.80 5.22 6.02

x 6.24 6.45 6.39 6.83 6.79 6.95 6.87 6.78 6.92 7.24
y 4.07 5.29 3.66 7.31 5.89 6.58 4.73 2.78 3.26 5.65

x 7.25 7.21 7.50 7.61 7.91 7.98 8.07 8.02 8.13 8.28
y 4.75 3.33 5.40 5.56 7.74 7.48 7.43 5.90 6.07 6.65

x 8.38 8.51 8.44 8.54 8.67 8.93 8.77 9.04 9.25 9.21
y 6.71 7.09 5.35 5.40 5.78 7.53 4.84 6.69 7.91 6.49

Nr. 4

x 3.50 3.82 3.94 4.06 4.50 5.00 4.88 5.21 5.92 6.09
y 7.48 7.99 6.31 4.63 6.46 8.95 4.63 5.26 10.05 8.92

x 6.19 6.73 6.69 7.29 7.31 7.74 8.34 8.53 8.48 9.08
y 7.02 9.95 6.51 10.09 7.31 9.04 12.62 11.71 8.16 11.75

x 9.38 9.61 9.91 10.37 10.41 10.62 11.31 11.63 11.79 12.08
y 12.04 11.57 11.86 13.91 11.35 10.66 15.23 15.75 14.50 14.69

x 12.10 12.51 12.82 13.37 13.42 13.80 14.09 14.57 14.45 14.85
y 11.91 13.41 13.81 16.85 14.40 15.57 15.76 18.03 13.71 15.10

x 15.11 15.60 15.98 16.32 16.61 17.03 17.01 17.28 17.47 18.13
y 14.96 17.34 18.51 19.24 19.43 21.04 17.82 17.78 16.87 21.12

x 18.41 18.76 18.88 19.40 19.38 19.97 19.86 20.16 20.86 21.03
y 21.19 22.03 20.35 23.06 19.84 23.32 19.11 19.41 24.09 22.96

Nr. 5

x 2.27 2.69 2.92 2.91 3.13 3.33 3.56 3.69 4.03 4.01
y 9.02 12.64 13.72 11.59 12.53 13.21 14.28 14.02 16.57 14.30

x 4.39 4.29 4.84 4.67 5.26 5.53 5.50 5.79 5.75 6.24
y 17.39 14.05 19.41 15.13 21.03 22.64 20.24 22.12 19.59 24.14

x 6.37 6.42 6.49 7.06 7.31 7.32 7.38 7.71 7.94 7.95
y 23.88 22.55 21.49 27.11 28.46 26.59 25.39 27.81 28.89 27.02

x 8.18 8.66 8.93 8.82 8.98 9.33 9.70 9.85 9.86 10.29
y 28.10 32.52 34.13 30.66 30.80 33.49 36.44 36.44 34.58 38.33

x 10.40 10.30 10.80 10.91 10.89 11.23 11.54 11.72 11.96 11.95
y 37.80 34.46 39.15 38.63 36.36 38.91 41.06 41.46 42.67 40.54

x 12.31 12.60 12.60 12.89 13.04 13.38 13.38 13.89 14.05 14.21
y 43.36 45.24 43.24 45.12 45.13 47.67 45.67 50.50 50.64 50.78

Nr. 6

x 1.32 1.26 1.51 1.62 1.63 1.93 1.78 1.87 2.29 2.34
y 7.45 5.66 7.95 8.40 7.53 10.49 7.51 7.70 12.23 11.89

x 2.35 2.49 2.57 2.60 2.58 2.61 3.07 3.00 3.15 3.14
y 11.02 11.87 11.92 11.32 10.05 9.45 14.51 12.59 13.57 12.44

x 3.52 3.27 3.51 3.41 3.62 3.64 3.77 3.97 4.03 4.09
y 16.44 12.15 14.31 11.99 13.76 13.03 13.74 15.37 15.17 14.96

x 4.39 4.29 4.70 4.47 4.67 4.64 4.92 4.98 5.23 5.28
y 17.91 15.59 20.00 15.96 17.60 16.21 18.90 18.69 20.98 20.64

x 5.52 5.51 5.73 5.42 5.80 5.66 5.69 5.81 5.89 5.99
y 22.80 21.67 23.57 18.49 22.49 19.65 19.04 19.63 19.68 20.00

x 6.11 6.28 6.48 6.79 6.68 6.74 6.67 6.95 6.86 7.22
y 20.58 21.82 23.46 26.54 24.09 23.88 21.96 24.65 22.46 26.21

Nr. 7

x 1.54 1.64 1.90 2.59 3.11 3.50 3.84 3.98 4.41 4.90
y 8.61 5.83 4.99 9.40 11.73 12.48 12.62 10.33 11.56 13.53

x 5.22 5.49 6.24 6.70 6.74 7.42 7.65 7.95 8.38 9.05
y 13.43 12.72 17.85 19.46 15.94 20.23 19.03 18.68 19.92 24.08

x 9.52 9.70 10.01 10.49 10.68 11.31 11.82 12.14 12.44 13.00
y 25.80 24.00 23.77 25.62 23.93 27.61 29.82 29.72 29.37 32.19

x 13.15 13.87 14.03 14.57 14.77 15.45 15.74 16.09 16.27 16.75
y 30.02 34.79 32.74 35.31 33.75 38.03 37.56 37.83 36.02 37.87

x 17.29 17.49 18.02 18.37 19.13 19.48 19.46 20.07 20.36 20.84
y 40.44 38.88 41.33 41.60 46.85 47.12 42.87 46.30 45.83 47.68

x 21.08 21.86 22.21 22.57 23.01 23.29 23.69 23.95 24.28 24.82
y 46.60 52.10 52.37 52.75 54.11 53.52 54.39 53.56 53.58 56.16

Nr. 8

x 1.19 1.66 1.89 2.39 2.57 2.87 3.01 3.32 3.80 3.94
y 3.33 5.02 4.31 6.30 5.10 5.09 3.49 3.58 5.37 3.77

x 4.37 4.38 4.92 5.07 5.59 6.00 6.26 6.63 6.91 7.17
y 5.06 2.16 4.55 3.05 5.24 6.33 5.92 6.62 6.41 6.01

x 7.32 7.83 7.88 8.15 8.64 8.75 9.00 9.55 9.72 10.07
y 4.50 6.59 4.09 3.79 5.68 3.77 3.27 5.76 4.46 4.95

x 10.47 10.53 10.92 11.13 11.57 11.71 11.95 12.48 12.68 13.16
y 5.94 3.54 4.43 3.53 4.92 3.32 2.71 5.00 4.00 5.79

x 13.28 13.42 14.11 14.12 14.58 14.63 15.08 15.33 15.69 16.03
y 3.98 2.38 6.27 3.37 4.96 2.46 3.95 3.44 4.04 4.43

x 16.28 16.71 16.98 17.44 17.50 17.61 18.30 18.47 18.60 19.08
y 3.92 5.22 4.91 6.50 4.10 2.20 6.08 4.78 3.08 4.87

Nr. 9

x 2.54 2.49 2.82 2.97 3.05 3.26 3.74 3.93 3.75 4.12
y 9.99 7.38 9.40 9.22 8.20 8.76 12.60 12.92 8.73 11.23

x 4.50 4.25 4.86 4.80 4.90 5.16 5.70 5.94 5.70 5.85
y 13.86 8.82 14.24 11.51 10.73 11.90 16.48 17.40 12.48 12.30

x 6.52 6.58 6.91 6.92 7.15 7.49 7.27 7.59 8.05 8.01
y 18.46 17.19 19.21 17.34 18.14 20.28 15.60 17.50 21.10 18.61

x 8.42 8.48 8.73 8.87 8.98 9.10 9.41 9.49 10.11 9.90
y 21.61 20.34 21.38 21.09 20.43 19.89 21.66 20.64 26.19 21.63

x 10.14 10.60 10.77 10.95 11.33 11.18 11.33 11.81 11.88 12.02
y 22.56 26.16 26.23 26.42 29.05 25.22 25.05 28.90 27.75 27.45

x 12.08 12.40 12.54 12.68 12.96 13.08 13.30 13.65 13.90 14.14
y 26.18 28.08 27.79 27.49 28.90 28.36 29.04 31.31 32.35 33.28

Nr.10

x 2.17 2.35 2.43 2.43 2.60 2.98 2.76 3.03 3.05 3.11
y 4.05 5.20 5.16 4.16 5.20 8.75 5.11 7.35 6.59 6.31

x 3.30 3.15 3.68 3.47 3.76 3.65 3.96 4.23 4.29 4.07
y 7.58 4.79 10.14 6.62 9.09 6.78 9.49 11.73 11.44 7.81

x 4.47 4.39 4.37 4.79 4.94 4.77 5.00 5.03 5.14 5.00
y 11.60 9.64 8.40 12.43 13.23 10.19 11.95 11.31 11.63 8.95

x 5.13 5.54 5.69 5.81 5.84 5.95 6.12 5.76 5.88 6.36
y 9.51 13.42 14.22 14.65 14.01 14.33 15.37 10.05 10.49 15.24

x 6.22 6.41 6.26 6.39 6.55 6.81 6.85 7.00 6.96 7.23
y 12.57 13.84 11.04 11.60 12.52 14.63 14.11 14.91 13.43 15.67

x 7.40 7.59 7.30 7.50 7.59 7.87 7.88 7.82 7.96 8.37
y 16.70 17.98 13.50 14.90 14.98 17.33 16.45 14.73 15.41 19.32

Nr.11

x 2.54 2.67 3.02 3.71 4.04 4.40 4.65 4.88 5.56 5.90
y 6.40 3.70 3.19 6.08 5.37 4.96 3.46 1.75 4.54 3.93

x 6.07 6.88 7.26 7.50 7.77 8.42 8.88 9.04 9.28 9.67
y 1.63 5.71 5.50 3.90 2.59 5.08 5.67 3.27 1.66 1.56

x 10.19 10.79 10.87 11.51 11.97 12.47 12.47 12.95 13.35 13.99
y 2.75 4.73 1.53 3.92 4.51 5.50 1.50 2.29 2.28 4.67

x 14.17 14.92 14.87 15.25 15.70 16.11 16.73 17.18 17.58 18.06
y 2.47 5.95 1.45 1.24 1.74 1.83 4.02 4.51 4.50 5.29

x 18.49 18.70 19.07 19.72 19.91 20.13 20.81 20.90 21.39 21.75
y 5.58 3.68 3.37 5.86 3.75 1.95 4.73 1.63 2.52 2.11

x 22.51 22.84 22.92 23.47 23.98 24.31 24.86 25.07 25.42 25.82
y 5.70 4.99 1.79 3.28 4.37 3.66 5.15 3.25 2.74 2.73

Nr.12

x 3.34 3.49 3.88 4.06 4.32 4.38 4.42 4.80 4.91 4.87
y 8.32 7.97 10.25 10.23 11.08 9.74 8.18 10.35 9.56 7.12

x 5.35 5.54 5.79 5.88 6.10 6.07 6.68 6.71 6.99 7.28
y 10.39 10.48 11.22 10.21 10.63 8.30 13.00 11.33 12.40 13.58

x 7.09 7.58 7.67 8.13 8.15 8.05 8.32 8.61 8.83 9.25
y 9.50 12.88 11.87 14.92 13.14 10.04 11.00 12.19 12.60 15.22

x 9.38 9.67 9.70 10.13 9.99 10.28 10.52 10.63 11.11 11.30
y 14.64 15.83 14.16 16.88 13.34 14.52 15.16 14.37 17.64 17.72

x 11.17 11.41 11.73 12.06 12.01 12.17 12.53 12.67 12.85 13.09
y 14.30 14.93 16.45 18.07 15.52 15.28 17.23 16.77 16.74 17.38

x 13.44 13.60 13.86 14.09 13.87 14.35 14.42 14.62 14.84 15.06
y 19.22 18.98 19.83 20.36 15.94 19.21 17.98 18.18 18.59 19.01

Nr.13

x 3.29 3.57 3.79 4.29 4.51 4.70 4.88 5.26 5.66 6.03
y 9.41 9.70 9.30 12.19 11.78 11.02 10.14 11.61 13.32 14.68

x 6.47 6.52 6.74 7.36 7.54 7.71 8.28 8.33 8.47 8.91
y 16.87 14.46 14.05 18.35 17.47 16.47 20.19 17.78 16.43 18.61

x 9.48 9.35 9.95 10.36 10.25 10.64 11.16 11.57 11.90 11.75
y 22.32 17.79 21.86 23.69 19.40 20.99 24.11 25.94 26.83 22.07

x 12.35 12.60 12.67 13.00 13.41 13.83 14.08 14.16 14.59 15.18
y 26.13 26.08 23.90 24.79 26.62 28.57 28.51 26.45 28.52 32.47

x 15.30 15.48 15.90 16.37 16.34 17.03 16.98 17.46 17.89 17.98
y 30.88 30.00 31.95 34.49 31.14 36.26 32.67 35.33 37.39 35.45

x 18.25 18.36 18.68 19.21 19.44 19.57 19.94 20.28 20.92 20.86
y 35.64 33.93 34.70 37.94 37.65 36.18 37.54 38.55 43.09 39.38

Nr.14

x 0.52 0.51 0.65 0.91 0.86 1.54 1.47 1.84 1.75 2.20
y 4.88 2.76 2.44 3.55 0.95 7.10 4.26 6.69 3.62 7.01

x 2.18 2.62 2.77 2.90 3.15 3.32 3.71 3.62 3.95 4.34
y 4.77 8.04 7.83 7.39 8.39 8.42 11.10 8.02 9.97 12.64

x 4.35 4.66 4.90 4.75 4.99 5.18 5.28 5.88 6.09 6.34
y 10.76 12.48 13.35 9.55 10.43 10.71 9.90 15.09 15.61 16.60

x 6.06 6.65 6.68 6.92 6.87 7.39 7.41 7.85 7.73 8.28
y 11.25 16.32 14.68 15.55 12.95 17.18 15.42 18.69 15.26 19.84

x 8.43 8.36 8.66 9.09 8.96 9.38 9.71 9.61 9.68 10.17
y 19.64 16.80 18.40 21.55 17.99 21.02 22.98 19.78 18.62 22.49

x 10.05 10.42 10.53 11.07 11.25 11.47 11.58 11.58 12.06 12.25
y 19.05 21.48 20.80 25.27 25.43 26.06 25.38 23.38 27.13 27.41

Nr.15

x 1.09 1.26 1.45 1.63 1.69 1.74 1.83 1.94 2.17 2.31
y 4.69 5.69 6.93 8.05 7.76 7.35 7.41 7.70 9.41 10.06

x 2.18 2.63 2.60 2.37 2.55 2.63 2.93 3.18 3.34 3.06
y 7.53 11.83 10.48 6.77 7.89 7.83 10.37 12.31 13.20 8.90

x 3.21 3.50 3.53 3.48 3.77 3.87 3.91 3.96 4.15 4.25
y 9.66 12.08 11.43 9.84 12.26 12.44 11.91 11.50 12.74 12.92

x 4.50 4.30 4.52 4.79 4.82 4.91 4.86 5.19 5.14 5.15
y 14.86 11.50 13.10 15.28 14.63 14.69 13.10 15.99 14.40 13.52

x 5.06 5.36 5.44 5.54 5.75 5.93 5.86 5.87 6.19 6.00
y 11.46 13.99 13.93 14.11 15.59 16.71 14.88 14.00 16.77 13.53

x 6.47 6.25 6.61 6.70 6.65 6.67 6.86 6.97 6.93 6.99
y 18.07 14.48 17.72 17.78 16.19 15.42 16.66 16.96 15.49 15.19

Nr. 16

x 0.33 0.71 0.89 1.14 1.44 1.47 1.76 1.89 2.23 2.16
y 18.50 6.01 6.03 5.26 4.50 5.60 4.73 5.08 4.23 6.07

x 2.63 2.95 2.88 3.37 3.44 3.65 3.84 3.98 4.39 4.22
y 4.11 3.76 4.57 3.66 3.88 3.82 3.80 3.90 3.49 4.27

x 4.69 4.73 5.14 4.99 5.31 5.60 5.65 6.10 6.11 6.38
y 3.58 3.84 3.46 4.12 3.77 3.58 3.82 3.40 3.64 3.50

x 6.61 6.81 7.09 7.00 7.35 7.48 7.54 8.07 8.29 8.28
y 3.44 3.42 3.32 3.67 3.43 3.49 3.68 3.26 3.23 3.41

x 8.66 8.59 8.79 9.02 9.24 9.54 9.52 10.07 9.99 10.35
y 3.23 3.47 3.45 3.39 3.35 3.25 3.44 3.14 3.33 3.19

x 10.49 10.73 10.75 10.99 11.22 11.56 11.63 11.77 12.34 12.56
y 3.22 3.18 3.30 3.25 3.22 3.12 3.18 3.21 3.01 2.99

Nr. 17

x 0.52 0.80 1.16 1.19 1.82 2.04 2.20 2.61 2.62 3.18
y 0.74 0.75 0.88 0.22 0.99 0.95 0.81 0.97 0.53 0.99

x 3.44 3.74 4.19 4.16 4.86 5.10 5.21 5.72 5.99 5.98
y 0.98 1.00 1.10 0.88 1.14 1.13 1.06 1.15 1.15 1.04

x 6.35 6.59 7.26 7.57 7.49 7.80 8.28 8.50 9.08 9.39
y 1.09 1.07 1.19 1.20 1.11 1.12 1.18 1.17 1.22 1.23

x 9.68 9.72 10.08 10.43 10.78 10.73 11.07 11.61 12.09 12.18
y 1.23 1.19 1.21 1.22 1.23 1.18 1.19 1.23 1.26 1.24

x 12.24 12.88 13.18 13.44 13.84 13.72 14.03 14.62 14.72 15.26
y 1.21 1.25 1.26 1.25 1.27 1.22 1.23 1.26 1.25 1.27

x 15.27 15.88 15.94 16.53 16.65 17.11 17.46 17.47 17.81 18.06
y 1.25 1.27 1.26 1.28 1.27 1.28 1.29 1.27 1.28 1.27

Nr. 18

x 0.54 0.87 1.29 1.56 2.19 2.25 2.80 3.35 3.52 4.08
y 1.24 1.31 1.20 1.40 0.98 1.50 1.11 0.93 1.12 0.93

x 4.20 4.87 5.05 5.44 5.76 6.33 6.76 7.20 7.71 8.17
y 1.20 0.88 1.03 1.01 1.05 0.88 0.84 0.81 0.75 0.72

x 8.30 8.56 8.96 9.68 9.73 10.44 10.91 11.10 11.52 11.72
y 0.80 0.85 0.83 0.71 0.81 0.70 0.68 0.72 0.70 0.75

x 12.10 12.67 13.20 13.77 13.98 14.25 14.54 15.10 15.59 15.79
y 0.74 0.69 0.66 0.62 0.65 0.66 0.68 0.64 0.62 0.65

x 16.59 16.86 17.38 17.38 18.17 18.59 18.50 19.03 19.79 19.76
y 0.59 0.60 0.59 0.63 0.58 0.58 0.62 0.60 0.57 0.60

x 20.25 20.77 21.31 21.51 22.13 22.21 22.92 22.93 23.46 24.02
y 0.59 0.58 0.56 0.58 0.56 0.58 0.55 0.58 0.57 0.55

Nr. 19

x 0.40 0.72 0.78 1.11 1.31 1.71 2.28 2.41 2.67 2.99
y 1.92 1.67 4.14 2.96 4.64 2.33 1.08 1.45 1.50 1.34

x 3.53 3.60 4.08 4.19 4.52 4.61 5.29 5.32 5.85 5.86
y 0.84 1.17 0.83 1.07 0.97 1.39 0.71 1.00 0.70 1.01

x 6.49 6.86 7.18 7.41 7.68 8.02 8.15 8.69 8.94 9.06
y 0.63 0.57 0.55 0.57 0.57 0.54 0.61 0.48 0.49 0.56

x 9.53 9.48 9.72 10.19 10.38 10.91 11.25 11.20 11.82 12.08
y 0.47 0.64 0.66 0.54 0.58 0.47 0.44 0.58 0.44 0.44

x 12.53 12.66 12.93 13.30 13.58 13.93 14.14 14.60 14.81 15.18
y 0.39 0.43 0.43 0.40 0.40 0.38 0.40 0.35 0.37 0.34

x 15.31 15.55 15.89 16.47 16.68 17.04 17.18 17.67 17.62 18.01
y 0.38 0.38 0.37 0.31 0.32 0.31 0.33 0.29 0.35 0.33

Nr. 20

x 0.28 0.77 0.82 1.17 1.15 1.65 1.83 1.61 1.81 2.22
y 10.72 4.87 5.76 4.71 6.15 4.36 4.36 7.88 7.37 4.89

x 2.64 2.67 2.90 3.03 3.32 3.55 3.45 3.66 3.91 4.06
y 4.18 4.55 4.41 4.56 4.28 4.18 5.11 4.96 4.66 4.79

x 4.44 4.69 4.91 5.14 5.40 5.24 5.85 5.97 5.96 6.38
y 4.22 4.10 4.04 3.98 3.89 4.48 3.81 3.86 4.10 3.82

x 6.39 6.65 6.86 7.20 7.42 7.28 7.55 8.01 8.05 8.05
y 4.01 3.91 3.88 3.74 3.72 4.03 3.92 3.69 3.79 3.98

x 8.24 8.50 8.63 8.87 9.13 9.25 9.45 9.64 10.06 10.30
y 3.97 3.88 3.93 3.87 3.80 3.86 3.84 3.83 3.66 3.63

x 10.59 10.77 11.02 11.04 11.15 11.66 11.48 11.66 12.17 12.43
y 3.58 3.58 3.55 3.62 3.66 3.51 3.68 3.68 3.53 3.50

Nr. 21

x 0.53 0.70 1.30 1.54 1.92 2.69 3.15 3.55 3.69 3.93
y 3.50 9.89 3.20 4.46 4.20 2.30 2.18 2.14 2.46 2.80

x 4.69 5.02 5.21 5.85 6.35 6.58 6.86 7.24 7.83 7.96
y 2.09 2.12 2.34 2.04 1.95 2.03 2.10 2.09 1.93 2.09

x 8.79 9.16 9.41 9.97 10.03 10.61 11.05 11.27 11.61 12.09
y 1.83 1.83 1.87 1.80 1.92 1.83 1.81 1.86 1.87 1.82

x 12.32 13.00 13.38 13.52 14.21 14.45 15.04 15.36 15.50 16.03
y 1.87 1.77 1.77 1.83 1.74 1.77 1.72 1.73 1.78 1.74

x 16.37 16.72 17.10 17.55 18.20 18.60 18.76 19.31 19.60 20.14
y 1.75 1.75 1.75 1.73 1.68 1.68 1.71 1.68 1.69 1.66

x 20.75 21.15 21.47 21.86 22.21 22.39 22.72 23.12 23.60 23.91
y 1.64 1.63 1.64 1.63 1.63 1.66 1.66 1.65 1.64 1.65

Nr. 22

x 0.28 0.65 0.33 0.51 0.99 0.87 0.84 0.95 1.18 1.08
y 3.74 1.87 10.98 4.66 1.71 2.43 3.52 3.27 2.24 4.08

x 1.14 1.61 1.65 1.57 1.89 1.74 1.92 1.83 2.30 2.16
y 4.85 1.75 1.87 2.60 1.73 2.68 2.19 3.67 1.64 2.34

x 2.32 2.43 2.44 2.48 2.62 2.77 2.71 3.16 3.02 3.33
y 2.05 1.98 2.30 2.59 2.31 2.06 2.93 1.57 2.15 1.59

x 3.52 3.26 3.75 3.84 3.93 3.63 3.92 4.24 3.95 4.24
y 1.45 2.29 1.39 1.39 1.39 2.26 1.67 1.36 2.07 1.58

x 4.56 4.66 4.47 4.66 4.80 4.93 4.96 5.10 5.31 5.13
y 1.31 1.31 1.66 1.50 1.44 1.39 1.47 1.41 1.30 1.62

x 5.46 5.20 5.76 5.58 5.83 5.83 5.71 5.82 6.00 6.41
y 1.32 1.86 1.23 1.49 1.32 1.40 1.73 1.69 1.53 1.22

Nr. 23

x 0.55 0.64 1.12 1.36 1.54 1.88 2.48 2.88 3.12 3.25
y 2.39 0.83 2.46 2.37 1.93 2.28 2.81 2.88 2.86 2.77

x 3.70 3.92 4.39 4.32 4.62 5.26 5.29 5.69 5.83 6.24
y 2.88 2.85 2.94 2.75 2.78 2.95 2.86 2.91 2.85 2.92

x 6.58 6.94 7.26 7.61 7.66 8.13 8.42 8.58 8.93 9.27
y 2.94 2.96 2.97 2.99 2.93 2.98 2.99 2.96 2.98 2.99

x 9.59 10.07 10.28 10.44 10.86 11.04 11.55 11.84 11.73 12.00
y 3.00 3.03 3.03 3.01 3.03 3.02 3.05 3.05 3.00 3.00

x 12.35 12.73 13.02 13.36 13.91 14.12 14.38 14.58 14.95 15.12
y 3.01 3.02 3.03 3.04 3.06 3.06 3.06 3.05 3.06 3.05

x 15.45 15.96 16.05 16.32 16.83 17.22 17.35 17.65 17.92 18.05
y 3.05 3.07 3.06 3.06 3.08 3.09 3.08 3.08 3.08 3.07

Nr.24

x 0.33 0.78 1.14 1.17 1.75 1.69 2.32 2.25 2.97 2.92
y 2.83 2.65 2.61 2.80 2.58 2.84 2.57 2.81 2.55 2.68

x 3.53 3.47 3.72 4.20 4.33 4.65 5.17 5.51 5.53 5.92
y 2.55 2.67 2.69 2.58 2.65 2.62 2.54 2.53 2.60 2.56

x 6.49 6.56 6.82 7.33 7.79 7.61 8.14 8.27 8.50 8.82
y 2.51 2.54 2.54 2.51 2.49 2.55 2.51 2.53 2.53 2.53

x 9.44 9.52 9.72 10.44 10.77 10.78 11.20 11.65 11.53 11.95
y 2.49 2.51 2.51 2.48 2.47 2.49 2.48 2.47 2.50 2.48

x 12.24 12.67 12.78 13.05 13.54 13.78 14.02 14.21 14.89 14.88
y 2.48 2.47 2.48 2.48 2.47 2.47 2.47 2.48 2.46 2.47

x 15.14 15.72 16.04 16.22 16.72 17.05 16.93 17.63 17.53 18.03
y 2.47 2.46 2.46 2.46 2.45 2.45 2.47 2.45 2.46 2.46

Nr.25

x 0.48 0.65 0.49 0.56 0.87 0.85 0.93 1.19 1.22 1.59
y 2.30 2.11 3.52 3.93 2.22 2.65 2.72 2.12 2.26 1.85

x 1.30 1.54 1.62 1.90 1.87 2.08 2.03 2.20 2.18 2.13
y 2.68 2.15 2.17 1.90 2.04 1.90 2.08 1.97 2.14 2.61

x 2.31 2.52 2.68 2.90 3.04 2.88 2.85 3.24 3.42 3.22
y 2.26 2.02 1.94 1.83 1.80 2.03 2.28 1.84 1.79 2.07

x 3.27 3.34 3.55 3.67 4.05 3.82 3.97 4.17 4.26 4.41
y 2.14 2.19 1.98 1.95 1.74 1.99 1.92 1.83 1.83 1.79

x 4.23 4.73 4.60 4.85 4.66 4.97 5.24 5.29 5.49 5.35
y 2.05 1.73 1.85 1.75 1.96 1.78 1.70 1.72 1.68 1.77

x 5.66 5.34 5.59 5.70 5.83 6.09 5.81 6.14 6.28 6.11
y 1.69 1.91 1.79 1.78 1.76 1.69 1.90 1.74 1.72 1.87

Nr.26

x 0.38 0.97 1.13 1.19 1.68 2.04 2.30 2.63 2.93 3.06
y 4.30 3.13 3.33 4.38 3.32 3.16 3.18 3.10 3.06 3.29

x 3.47 3.54 3.89 4.11 4.42 4.83 5.26 5.41 6.05 5.94
y 3.07 3.45 3.26 3.38 3.30 3.08 2.93 3.04 2.79 3.05

x 6.64 6.89 7.22 7.22 7.80 8.17 8.43 8.69 8.91 9.11
y 2.78 2.78 2.76 2.89 2.75 2.72 2.73 2.73 2.74 2.77

x 9.63 9.90 9.88 10.33 10.41 10.94 11.40 11.79 11.71 12.08
y 2.70 2.70 2.79 2.73 2.79 2.71 2.67 2.65 2.72 2.70

x 12.51 12.91 12.94 13.25 13.51 14.04 14.28 14.60 14.82 15.14
y 2.67 2.64 2.69 2.68 2.68 2.64 2.64 2.64 2.64 2.64

x 15.63 15.74 15.93 16.17 16.40 16.94 17.11 17.77 18.04 18.27
y 2.61 2.63 2.64 2.65 2.65 2.61 2.63 2.58 2.58 2.59

Nr.27

x 0.70 1.13 1.58 1.54 2.18 2.38 3.12 3.17 3.78 4.08
y 3.51 3.50 3.48 3.68 3.51 3.57 3.47 3.54 3.48 3.49

x 4.48 4.92 5.22 5.96 6.21 6.57 6.72 7.39 7.82 8.22
y 3.49 3.48 3.48 3.45 3.46 3.46 3.48 3.45 3.45 3.45

x 8.44 9.09 9.29 9.99 9.95 10.32 10.86 11.51 11.67 12.10
y 3.45 3.44 3.45 3.44 3.45 3.45 3.44 3.43 3.44 3.44

x 12.69 12.78 13.29 13.99 14.01 14.31 15.00 15.33 15.99 15.90
y 3.43 3.44 3.44 3.43 3.44 3.44 3.43 3.43 3.43 3.43

x 16.62 17.12 17.16 17.80 18.24 18.51 18.92 19.24 19.74 20.29
y 3.43 3.43 3.43 3.43 3.42 3.43 3.43 3.43 3.42 3.42

x	20.77	20.91	21.22	21.78	21.94	22.70	23.09	23.48	23.81	24.28
y	3.42	3.42	3.42	3.42	3.42	3.42	3.42	3.42	3.42	3.42

Nr.28

x	0.71	0.69	1.02	1.11	1.24	1.54	1.90	1.75	2.14	2.21
y	1.98	3.68	2.26	2.97	3.61	2.42	1.62	4.24	2.10	2.88

x	2.67	2.55	3.17	3.09	3.46	3.44	3.57	3.84	4.32	4.54
y	1.50	3.13	1.21	1.91	1.35	1.97	2.23	1.82	1.12	1.07

x	4.61	4.65	5.04	5.28	5.27	5.65	5.95	6.11	5.90	6.11
y	1.24	1.55	1.13	1.05	1.37	1.04	0.91	0.93	1.62	1.54

x	6.60	6.75	7.19	7.03	7.52	7.31	7.89	8.02	8.24	8.50
y	0.99	1.03	0.79	1.15	0.81	1.29	0.81	0.85	0.82	0.76

x	8.31	8.81	8.72	9.16	9.41	9.54	9.85	9.94	10.31	10.43
y	1.13	0.80	1.07	0.81	0.76	0.80	0.71	0.77	0.66	0.69

x	10.47	10.73	11.04	11.11	11.53	11.73	11.81	11.70	11.91	12.18
y	0.78	0.73	0.66	0.72	0.60	0.60	0.64	0.82	0.79	0.73

Nr.29

x	0.32	0.77	1.10	1.43	2.01	2.39	2.55	2.99	3.57	3.74
y	3.99	2.95	3.28	3.69	2.07	2.00	3.33	2.65	1.72	2.50

x	4.38	4.92	4.99	5.31	5.88	6.18	6.62	7.32	7.35	8.03
y	1.53	1.25	1.82	1.96	1.44	1.57	1.42	1.03	1.42	1.04

x	8.20	8.59	9.26	9.72	9.98	10.33	10.88	11.13	11.48	12.15
y	1.24	1.21	0.94	0.89	0.95	0.96	0.85	0.91	0.92	0.77

x	12.23	12.50	13.05	13.60	13.84	14.29	14.54	15.25	15.51	15.73
y	0.91	0.96	0.86	0.77	0.83	0.79	0.84	0.71	0.74	0.80

x 16.55 16.60 17.18 17.39 17.74 18.41 18.92 19.36 19.46 20.04
y 0.65 0.74 0.68 0.72 0.73 0.64 0.61 0.60 0.65 0.61

x 20.40 20.76 20.92 21.60 22.07 22.51 22.96 23.27 23.72 24.11
y 0.61 0.61 0.65 0.59 0.57 0.56 0.55 0.55 0.54 0.54

4. Dinamikos eilutės

4.1. Nustatykite eilutės tipą. Pavaizduokite grafiškai. Apskaičiuokite pagrindines eilutės charakteristikas. Atlikite prognozę, naudodami slenkamojo vidurkio metodą, suraskite vidutinę kvadratinę prognozės paklaidą.

Oficialus užsienio valiutų santykis 1994–1996 metais (vidutinis mėnesinis, litais už 100 valiutos vienetų)

Mė- Nuo	Vokietijos markė DEM	Anglijos Svarai Sterlingų GBP	Prancūzi- Jos Frankas FRF	Belgijos Frankas BEF	Kanados doleris CAD	Japonijos Jena JPY	Čekijos Krona CZK	Latvijos Latas LVL	Estijos Krona EEK	Rusijos rublis RUR*
94 01	223,82	581,45	65,89	10,75	296,04	3,50	12,95	658,48	28,00	28,03
94 02	224,57	578,08	66,11	10,89	291,60	3,66	12,98	675,36	27,99	24,76
94 03	231,82	585,18	68,03	11,25	288,54	3,73	13,27	687,98	28,97	22,92
94 04	235,60	592,24	68,78	11,44	289,37	3,87	13,50	701,89	29,45	22,35
94 05	241,10	601,46	70,41	11,71	289,83	3,86	13,70	707,63	30,13	21,38
94 06	245,16	609,55	71,78	11,91	289,18	3,89	13,84	712,67	30,59	20,48
94 07	254,67	618,25	74,32	12,35	289,43	4,06	14,20	728,89	31,37	19,77
94 08	255,62	616,97	74,62	12,41	290,08	4,01	14,20	728,33	31,99	18,92
94 09	257,77	624,23	75,35	12,52	295,04	4,05	14,30	731,15	32,20	17,30
94 10	262,59	640,75	76,73	12,76	296,49	4,06	14,48	737,45	32,78	13,35
94 11	260,46	637,19	75,87	12,66	293,48	4,08	14,40	737,12	32,64	12,73
94 12	254,22	623,36	73,84	12,36	288,37	3,99	14,17	726,08	31,79	11,88
95 01	260,78	629,14	75,45	12,66	283,40	4,01	14,41	731,95	32,55	10,55
95 02	265,95	629,23	76,52	12,92	285,35	4,07	14,60	738,54	33,19	9,45
95 03	283,85	639,72	80,10	13,75	284,46	4,40	15,25	767,20	35,40	8,47
95 04	289,91	643,32	82,64	14,10	290,09	4,77	15,48	787,03	36,25	7,98
95 05	284,41	636,31	80,36	13,82	294,06	4,71	15,31	779,13	35,58	7,88
95 06	285,41	638,06	81,30	13,90	290,38	4,74	15,33	782,10	35,70	8,45
95 07	287,86	637,75	82,67	14,00	293,75	4,59	15,42	779,36	35,97	8,85
95 08	277,81	628,26	80,74	13,51	294,85	4,25	15,06	758,69	34,83	9,06
95 09	273,31	622,82	79,28	13,29	296,56	3,99	14,89	741,43	34,04	8,95
95 10	282,89	631,46	81,03	13,75	297,28	3,98	15,24	749,80	35,35	8,89
95 11	283,06	627,17	81,98	13,77	296,01	3,93	15,25	748,40	35,39	8,82
95 12	277,59	615,18	80,53	13,50	292,15	3,93	15,04	742,99	34,71	8,67
96 01	274,30	612,73	80,13	13,35	292,92	3,80	14,86	735,89	34,34	8,54
96 02	272,74	613,86	79,32	13,26	290,77	3,78	14,81	732,29	34,04	8,40
96 03	270,71	610,97	79,05	13,17	292,79	3,78	14,68	731,90	33,88	8,27
96 04	266,49	606,59	78,48	12,97	294,37	3,72	14,58	726,18	33,34	8,16
96 05	261,07	604,88	77,17	12,70	292,54	3,77	14,46	722,91	32,64	8,04
96 06	261,82	616,40	77,25	12,73	292,81	3,68	14,39	721,46	32,71	7,91
96 07	265,49	621,23	78,43	12,89	292,33	3,66	14,76	724,23	33,15	7,78
96 08	269,97	620,09	79,10	13,10	291,43	3,71	15,08	729,72	33,75	7,58
96 09	266,36	623,87	78,14	12,93	292,04	3,65	15,08	725,44	33,32	7,44
96 10	261,65	632,16	77,36	12,70	295,74	3,57	14,76	719,67	32,69	7,37
96 11	265,08	663,25	78,35	12,86	298,89	3,56	14,90	726,01	33,11	7,30
96 12	258,01	665,29	76,35	12,52	293,93	3,52	14,64	719,64	32,25	7,22
97 03	235,97	643,82	82,64	11,44	292,13	3,27	13,69	686,74	29,50	7,01

*Litais už 10000 valiutos vienetų

Šaltinis: Lietuvos Banko Duomenys

Lietuvos ekonomikos apžvalga. 1997 gegužė (Lietuvos statistikos departamentas)

4.2. Nustatykite eilutės tipą. Pavaizduokite grafiškai. Suraskite trendą ir panaudokite jį prognozei.

a) Laukinės gyvūnijos skaičius.

	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Briedžiai	6251	5183	3444	3379	2850	2936	3774
Elniai	14664	14958	13391	13822	13800	13945	14825
Danieliai	335	292	341	350	430	490	418
Muflonai	136	88	122	82	100	59	64
Šernai	25300	1716	16620	18946	18500	19494	19530
Stirnos	45512	43363	37850	40840	41000	37647	35477
Kiškiiai	55403	53049	47323	53514	66200	86268	81560
Kiaunės	5728	5648	5880	7870	8350	9321	9009
Rudosios lapės	10521	9707	8916	10822	12600	13425	16610
Ondatros	6912	6890	4964	4349	5400	5319	4604
Audinės	1268	928	13397	1889	2400	2691	2197
Mangutai	5014	4703	4382	5296	6100	6496	6047
Bebrai	10778	9861	8442	7169	18500	8443	8984
Vilkai	445	479	485	684	600	543	604

b) Migracija su užsienio valstybėmis.

Metai	Atvyko	Išvyko
1990	14744	23592
1991	11828	20703
1992	6640	28855
1993	2850	15990
1994	1664	4246
1995	2020	3773
1996	3025	3940
1997	2536	2457
1998	2706	2130

c) Kai kurių pramonės gaminių gamybos apimtis Lietuvoje 1990-1997 metais.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Popierius, tūkst.t	100,7	101,2	34,6	14,2	13,6	18,3	16,8	14,3
Cementas, mln.t	3,4	3,1	1,5	0,7	0,7	0,6	0,7	0,7
Dviračiai,tūkst.vnt.	381	391	173	120	101	123,0	142,9	171
Televizoriai,tūkst.vnt.	558,2	516,2	444,8	423,6	180,8	55,0	57,5	51,9

d) Prekių eksportas ir importas faktinėmis kainomis(mln.Lt).

	1995				1996			
	I ketv.	II ketv.	III ketv.	IV ketv.	I ketv.	II ketv.	III ketv.	IV ketv.
Eksportas	2212	2615	2909	3084	3024	3055	3424	3616
Importas	3826	3371	3554	4383	3897	3900	4491	5330

e) Valstybinio sektoriaus pagrindinių šakų darbuotojų vidutinis mėnesinis darbo užmokestis (paskutinį ketvirčio mėnesį, Lt)

	Visos šakos	Apdirbamoji pramonė	Elektros, dujų ir vandens tiekimas	Statyba	Finansinis tarpininkavimas	Švietimas	Sveikata ir socialinis darbas
95 03	451	504	703	466	781	352	338
95 06	512	564	762	556	1085	393	375
95 09	524	613	799	652	924	390	372
95 12	667	680	1001	624	1699	497	480
96 03	659	716	1060	609	1325	476	460
96 06	677	718	1073	654	1257	505	464
96 09	701	752	1118	739	1153	524	472
96 12	811	870	1261	813	1324	608	568
97 03						630	
97 06						684	
97 09						680	
97 12						872	
98 03						816	
98 06						882	

Pratimai

1. Stebint minimalią rugsėjo mėnesio dienos temperatūrą °C gauti tokie duomenys:

15⁰ 18⁰ 13⁰ 11⁰ 14⁰ 15⁰ 13⁰ 11⁰ 10⁰ 9⁰ 9⁰ 12⁰
 11⁰ 10⁰ 11⁰ 8⁰ 9⁰ 12⁰ 13⁰ 12⁰ 11⁰ 8⁰ 7⁰ 8⁰
 10⁰ 8⁰ 7⁰ 4⁰ 3⁰ 8⁰

Užrašykite duomenis varijacine eilute. Sudarykite dažnių lentelę. Raskite vidurkį, modą, medianą, kvartilius.

2. Apklausus 25 studentus, kiek jie turi brolių ir seserų, gauti tokie atsakymai:

0 0 5 3 0 0 1 1 1 2 1 1
 2 2 0 0 3 0 1 1 1 3 1 1
 2 2

Sudarykite dažnių lentelę. Raskite vidurkį, modą, medianą. Apskaičiuokite dispersiją.

3. Užrašykite duomenis varijacine eilute. Suskirstykite intervalais ir nubrėžkite histogramą.

3.1. Didžiausi Lietuvos miškų masyvai.

Girių vardai		Bendras plotas (ha)	Mišku apaugęs Plotas (ha)
1.	Ažvinčių-Minčios giria	22 040	19 400
2.	Biržų giria	18 070	15 050
3.	Druskininkų-Varėnos miškai (Gudų giria, Dainavos giria)	145 000	138 000
4.	Gaižiūnų –Rumšiškių miškai	30 400	21 500
5.	Gruzdžių-Gubernijos miškai	10 220	8 790
6.	Kapčiamiesčio giria	27 700	23 600
7.	Karšuvos giria (Viešvilės-Smalininkų miškai)	42 700	35 500
8.	Kazlų Rūdos miškai	58 700	47 300
9.	Labanoro-Pabradės giria	58 700	72 500
10.	Lavoriškių-Nemenčinės miškai	31 000	27 300
11.	Pažimės-Tryškių miškai	10 080	6 900
12.	Rūdininkų giria	37 500	31 500
13.	Rūdiškių miškai	19 500	17 230
14.	Sausašilio-Tumiškės miškai	12 700	9 650
15.	Šimonių giria	13 500	10 870
16.	Žalioji giria	19 060	15 600
17.	Judrėnų-Tverų (Rietavo) miškai	20 870	17 220

3.2. Amerikos miškų plotai (tūkstančiais akrų)

Alabama	20 771	Montana	22 330
Aliaska	136 208	Nebraska	1 482
Arizona	19 212	Nevada	12 036
Arkanzas	20 816	Niu Hampšyras	4 848
Kalifornija	42 541	Niū Džersis	2 229
Koloradas	20 834	Naujoji Meksika	21 329
Konektikutas	1 990	Šiaurės Karolina	20 076
Delaveras	392 000	Šiaurės Dakota	467 000
Florida	21 016	Ohajas	5 446
Džordžija	24 057	Oklahoma	10 051
Havajai	2 000	Oregonas	30 261
Aidahas	21 025	Pensilvanija	15 186
Ilinojus	3 993	Rod Ailendas	434 000
Indiana	4 103	Pietų Karolina	12 016
Ajova	2 620	Pietų Dakota	2 169
Kanzas	1 668	Tenesis	12 558
Kentukis	11 497	Teksas	37 656
Luiziana	16 129	Jūta	16 114
Meinas	17 425	Vermontas	3 730
Merilendas	2 920	Virdžinija	16 114
Masačūsetsas	3 288	Vakarų Virdžinija	9 907
Mičiganas	19 699	Vašingtonas	23 868
Minesota	19 344	Viskonsinas	15 588
Misisipė	17 225	Vajomingas	10 513
Misūris	15 177	Niujorkas	14 450

3.3. Medžių pasiskirstymas pagal defoliacijos klases įvairiose Europos šalyse (1992 m. duomenys)

Šalys	Defoliacijos klasė			
	0 Sąlyginai sveiki	1 Silpnai pažeisti	2 Vidutiniškai pažeisti	3+4 Stipriai pažeisti arba žuvę
Airija	49,2	35,1	14,5	1,2
Australija	56,4	36,7	6,3	0,6
Baltarusija	26,4	44,4	28,3	0,9
Belgija	36,7	46,4	15,6	1,3
Bulgarija	42,8	34,1	21,6	1,5
Čekija	8,7	34,8	51,8	4,6
Danija	44,1	30,0	20,5	5,4
D.Britanija	5,0	36,7	55,3	3,0
Estija*	40,8	30,7	27,2	1,3
Graikija*	42,8	39,1	15,4	2,7
Kroatija	56,9	27,5	12,8	2,8
Latvija	30,0	33,0	36,0	1,0
Lenkija	8,0	43,2	46,5	2,3
Lichtenšteinas	52,0	32,0	12,0	4,0
Lietuva	16,3	66,2	15,9	1,6
Liuksemburgas	48,7	30,7	16,6	3,8
Niderlandai	43,9	22,7	28,7	4,7
Norvegija	40,3	33,5	22,1	4,1

Šalys	Defoliacijos klasė			
	0 Sąlyginai sveiki	1 Silpnai pažeisti	2 Vidutiniškai pažeisti	3+4 Stipriai pažeisti arba žuvę
Prancūzija	75,1	16,9	6,8	1,2
Portugalija	54,4	23,1	20,9	1,6
Rumunija	48,9	34,4	13,5	3,2
Rusija*	55,9	38,7	3,8	0,8
Suomija	65,0	20,5	12,7	1,8
Slovakija	23,0	41,0	28,0	8,0
Švedija*	5,5	32,6	14,6	2,3
Šveicarija	38,0	46,0	14,0	2,0
Italija	57,0	24,8	14,5	3,7
Ispanija	50,6	37,1	9,5	2,8
Ukraina	40,8	42,9	15,1	1,2
Vengrija	42,4	36,1	17,4	4,1
Vokietija	32,0	41,6	25,0	1,4

* tirti tik spygliuočių miškai.

4. Nubrėškite sklaidos diagramą. Apskaičiuokite koreliacijos koeficientą. Raskite regresijos lygtį.

4.1.

X	2,1	2,3	2,5	2,6	2,7	2,9	2,9	3	3,2	3,4	3,5	3,5	3,7	3,9	3,9
Y	4,4	4,9	5,6	5,7	6,2	6,8	6,6	7,1	7,5	8,3	8,4	8,3	9,0	9,8	9,5

4.2.

X	0,2	0,5	0,6	0,6	0,9	0,9	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,3
Y	16,1	7,9	7,0	6,8	5,1	5,3	4,9	4,7	4,6	4,2	3,8	3,6	3,5	3,1

5. Nustatykite eilutės tipą. Pavaizduokite grafiškai. Raskite absoliučius padidėjimus, didėjimo koeficientus (lyginant su prieš tai buvusiu dinamikos lygiu), didėjimo tempus. Apskaičiuokite vidutinį lygį.

5.1. Miško atnaujinimas (Lietuvos statistikos metraštis, 1999)

	1985	1990	1995	1996	1997	1998
Pasėta ir pasodinta miško, ha	8747	7604	6978	8508	10743	10169
Nusausinta miško plotų, ha	8104	6069	1879	986	1477	1175

5.2. Kirtimas valstybiniuose miškuose (ten pat)

	1985	1990	1995	1996	1997	1998
Iš viso iškirsta						
tūkst.ha	190,9	190,3	259,1	199,7	215,3	199,1
tūkst. m ³	3007,9	3037,9	5280,7	4771,1	4259,6	4122,1

5.3. Kritulių kiekis per metus (mm)

Metai	Klaipėda	Varėna	Vilnius
1990	887	738	805
1992	735	704	661
1993	685	744	826
1994	791	715	687
1995	739	607	577
1996	568	543	490
1997	680	654	658

5.4. Vandens sunaudojimas per metus (milijonais kubinių metrų)

Metai	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Gamybinėms reikmėms	3566,8	3510,1	3111,3	3856,9	3449,9	4148,6	5318,2
Ūkio ir buities reikmėms	403,2	368,7	297,1	259,8	250,6	196,1	167,1
Geriamas vanduo	94,0	81,4	46,1	32,7	29,3	9,1	8,3

Priedai

Funkcijas $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ reikšmės

1 lentelė

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03585
0,1	0,03983	0,04379	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,05962	0,06356	0,06750	0,07146
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30510	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34850	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39616	0,39796	0,39973	0,40148
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42786	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44259	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45544	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,47982	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48499	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48746	0,48776	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49586	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49830	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49860
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49959	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49982	0,49982	0,49983	0,49984
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49993
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997

Lygties $P\{\chi_r^2 > \chi_{kr}^2\} = \alpha$ sprendiniai (pasiskirstymui su r laisvės laipsniais)

r	2 lentelė																						
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001									
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,071	3,84	5,041	6,64	10,83									
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82									
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27									
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46									
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5									
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5									
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3									
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,10	26,1									
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9									
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,79	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6									
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3									
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,59	21,0	24,1	26,2	32,9									
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6									
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1									
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7									
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3									
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8									
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3									
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8									
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,7	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3									
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8									
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3									
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7									

Literatūra

1. Kubilius J. Tikimybių teorija ir matematinė statistika, „Mokslas“, Vilnius, 1996.
2. Januškevičius R. Statistikos įvadas, VPU leidykla, Vilnius, 2000.
3. Svetulevičienė V. Matematinės statistikos elementai. I dalis, Vilnius, 1976.
4. Kaminskienė B. Matematinės statistikos elementai. II dalis, Vilnius, 1977.
5. Čekanavičius V., Murauskas G. Statistika ir jos taikymai, I, TEV, Vilnius, 2000.
6. Громько Г. Л. Статистика, изд. МГУ, Москва, 1976.
7. Lietuvos statistikos metraštis. 1997.
8. Lietuvos statistikos metraštis. 1998.

L. GRINIUVIENĖ
STATISTIKOS PRAKTINIAI DARBAI

Metodinė medžiaga

Tir. 150 egz. 9,75 sp. l. Užsak. Nr. 59

Išleido Vilniaus pedagoginis universitetas, Studentų g. 39, LT-2004 Vilnius
Maketavo ir spausdino VPU leidykla, T. Ševčenkos g. 31, LT-2009 Vilnius

Kaina sutartinė
